Parciális integrálás

1.

$$\int (3x-4)\sin x\,dx$$

Megoldás: Parciális integrálást alkalmazunk. Az általános formula:

$$\int u\cdot v' = u\cdot v - \int u'\cdot v,$$

célunk tehát az, hogy a $(3x-4)\sin x$ függvényt – ami a fenti egyenlőség baloldala – úgy írjuk fel $u\cdot v'$ alakban, hogy az egyenlőség jobboldala könnyen kiszámolható legyen. Vegyük észre, hogy a jobboldalon két integrált kell kiszámolnunk: a v'-ből a v-t, s ezek után az $u'\cdot v$-ből az $\int u'\cdot v$-t. Ezt figyelembe kell vennünk az u és v' szerepének megválasztásakor - amelynél, természetesen, tetszőleges „szabadsági fokunk" van, hiszen bármely függvényt, így például a $(3x-4)\sin x$ függvényt is végtelen sokféleképpen írhatjuk fel $u\cdot v'$ alakban. Paradox módon éppen ez a hatalmas szabadság teszi a parciális integrálást némileg nehézzé a gyakorlatlan kezdők számára; nem könnyű általánosságban pontosan megmondani, hogy egy konkrét esetben mi legyen az u és mi legyen a v'. Ezt a bizonytalanságot sok gyakorlással lehet eloszlatni, de van néhány egyszerű alapelv, amelyek megkönnyíthetik a helyzetünket. Egy ilyen például az az észrevétel, hogy a hatványfüggvényeket, polinomokat és a sin, cos függvényeket könnyű differenciálni, is, integrálni is. Mivel az u és v' megválasztásakor u-t majd differenciálni, v'-t viszont integrálni kell, esetünkben célszerű a polinomot választani differenciálandónak, a trigonometrikus függvényt pedig integrálandónak, hiszen az integrálással a sin lényegében nem „bonyolódik", a polinom viszont a differenciálással egyszerűsödik. Legyen tehát $u=3x-4$ és $v'=\sin x$, ekkor $u'=3$, és $v=-\cos x$, s az integrál így alakul:

$$\int (3x-4)\sin x\,dx = (3x-4)(-\cos x) - \int 3\cdot(-\cos x)\,dx.$$

A jobboldal már könnyen kiszámolható:

$$\int (3x-4)\sin x\,dx = (3x-4)(-\cos x) - \int 3\cdot(-\cos x)\,dx. =$$

$$(4-3x)\cos x + 3\int \cos x\,dx = (4-3x)\cos x + 3\sin x + c.$$

2.

$$\int (2x+7)\,3^x\,dx \tag{1}$$

Megoldás: Ismét parciális integrálást alkalmazunk. Az

$$\int u\cdot v' = u\cdot v - \int u'\cdot v$$

általános formulában u-t és v'-t kell alkalmasan megválasztani úgy, hogy a jobboldalon v'-ből v-t, majd pedig $\int u'\cdot v$-t könnyen ki tudjuk számítani. Ebből a szempontból az exponenciális függvény is hasonlóan viselkedik a $\sin, \cos$ függvényekhez: sem differenciálással, sem integrálással nem

„bonyolódik”, viszont a $2x+7$ polinom differenciálással egyszerűsödik. Legyen tehát $u = 2x+7$ és $v' = 3^x$, ekkor $u' = 2$ és $v = \frac{3^x}{\ln 3}$, s a parciális integrálás formulája szerint

$$\int (2x+7)\, 3^x \, dx = (2x+7)\frac{3^x}{\ln 3} - \int 2 \cdot \frac{3^x}{\ln 3}\, dx =$$

$$(2x+7)\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3}\int 3^x \, dx = (2x+7)\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3}\frac{3^x}{\ln 3} + c = (2x+7)\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{2\cdot 3^x}{(\ln 3)^2} + c.$$

3.

$$\int (5x+8)\, \cos x \, dx$$

Megoldás: A fentiekhez hasonlóan, az

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

általános formulában u-t és v'-t kell alkalmasan megválasztani úgy, hogy a jobboldalon v'-ből v-t, majd pedig $\int u' \cdot v$-t könnyen ki tudjuk számítani. A cos függvény a sin függvényhez hasonló, így legyen $u = 5x+8$, $v' = \cos x$, ekkor $u' = 5$ és $v = \sin x$, tehát a parciális integrálás formulája alapján

$$\int (5x+8)\, \cos x \, dx = (5x+8)\sin x - \int 5 \sin x \, dx = (5x+8)\sin x + 5\cos x + c.$$

4.

$$\int (8x-9)\, \ln x \, dx$$

Megoldás: Itt a helyzet kicsit más, mint a fentiekben: a $8x-9$ polinom nem jelent változást, de az ln függvény integrálása bonyodalmat okoz, ha azt választjuk v'-nek. Így inkább vállaljuk azt a „rizikót”, hogy az $\ln x$ legyen a differenciálandó u, s a $v' = 8x-9$ polinomot fogjuk integrálni: ekkor tehát $u = \ln x$ és $v' = 8x-9$, amiből $u' = \frac{1}{x}$ és $v = \int (8x-9) dx = 4x^2 - 9x$ adódik. A parciális integrálási formula alapján azt kapjuk, hogy

$$\int (8x-9)\, \ln x \, dx = (4x^2-9x)\ln x - \int \frac{1}{x} \cdot (4x^2-9x)\, dx.$$

Máris világos, hogy nem okozott gondot az a tény, hogy az ln differenciálásával megjelent egy $\frac{1}{x}$ tényező, ez ugyanis azonnal egyszerűsödik:

$$\int (8x-9)\, \ln x \, dx = (4x^2-9x)\ln x - \int \frac{1}{x} \cdot (4x^2-9x)\, dx =$$

$$(4x^2-9x)\ln x - \int (4x-9)\, dx = (4x^2-9x)\ln x - 2x^2 + 9x + c.$$

5.

$$\int \ln 5x \, dx \tag{2}$$

Megoldás: Mindenekelőtt $\ln 5x = \ln 5 + \ln x$, ezért

$$\int \ln 5x \, dx = \int (\ln 5 + \ln x)\, dx = x \ln 5 + \int \ln x \, dx,$$

tehát a feladat az $\ln x$ integrálására redukálódik:

$$\int \ln x \, dx = ?$$

Hogyan integráljunk parciálisan, ha még szorzat sincs a láthatáron? A fentiekben már jeleztük, hogy **bármely** függvényt végtelen sokféleképpen lehet két függvény szorzataként felírni. Egy lehetséges „bárgyú" felírás például: $\ln x = 1 \cdot \ln x$. Bármilyen hihetetlen, esetünkben épp ez vezet eredményre, hiszen ha az előbbi feledat mintájára ebben a szozatban az 1-et választjuk integrálandónak, az $\ln x$-et pedig differenciálandónak, vagyis $u = \ln x$ és $v' = 1$, akkor $u' = \frac{1}{x}$ és $v = x$, továbbá, a parciális integrálási formula szerint

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + c.$$

Vegyük észre, hogy a parciális integrálás révén az $\ln x$ integrálásának problémáját végeredményben az $\ln x$ differenciálására vezettük vissza!

Visszatérve az eredeti feladatra, tehát azt kapjuk, hogy

$$\int \ln 5x \, dx = \int (\ln 5 + \ln x) \, dx = x \ln 5 + \int \ln x \, dx = x \ln 5 + x \ln x - x + c.$$

6.

$$\int (5x+1)e^{-0{,}2x} \, dx$$

Megoldás: Egy korábbi feladat mintájára, legyen $u = 5x+1$ és $v' = e^{-0{,}2x} = e^{-\frac{1}{5}x}$, ekkor $u' = 5$ és $v = -5e^{-\frac{1}{5}x}$, tehát a parciális integrálás szabálya alapján

$$\int (5x+1)e^{-0{,}2x} \, dx = (5x+1)(-5e^{-\frac{1}{5}x}) - \int 5(-5e^{-\frac{1}{5}x}) \, dx =$$

$$-5(5x+1)e^{-\frac{1}{5}x} + 25 \int e^{-\frac{1}{5}x} \, dx = -5(5x+1)e^{-\frac{1}{5}x} + 25(-5e^{-\frac{1}{5}x}) = -(25x+130)e^{-\frac{1}{5}x} + c.$$

7.

$$\int 6x \ln(-x) \, dx$$

Megoldás: A fentiek mintájára az ln-t tartalmazó tényezőt differenciáljuk, tehát $u = \ln(-x)$ és $v' = 6x$, vagyis $u' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$, és $v = 3x^2$. Ebből a parciális integrálás szabálya szerint azt kapjuk, hogy

$$\int 6x \ln(-x) \, dx = \ln(-x) \cdot 3x^2 - \int \frac{1}{x} \cdot 3x^2 \, dx = 3x^2 \ln(-x) - 3 \int x \, dx = 3x^2 \ln(-x) - 3\frac{x^2}{2} + c.$$

8.

$$\int 2x \sin 4x \, dx$$

Megoldás: A fenti feladatok mintájára a trigonometrikus részt integráljuk, a $2x$-et pedig differenciáljuk: $u = 2x$, $v' = \sin 4x$, ebből $u' = 2$ és $v = -\frac{1}{4}\cos 4x$, tehát a parciális integrálás szabálya szerint

$$\int 2x \sin 4x \, dx = 2x \cdot (-\frac{1}{4}\cos 4x) - \int 2 \cdot (-\frac{1}{4}\cos 4x) \, dx =$$

$$-\frac{1}{2}x\cos 4x+\frac{1}{2}\int\cos 4x\,dx=-\frac{1}{2}x\cos 4x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x=-\frac{1}{2}x\cos 4x+\frac{1}{8}\sin 4x+c.$$

9.
$$\int(1-3x)\cos 3x\,dx$$

Megoldás: A fenti feladatok mintájára a trigonometrikus részt integráljuk, az $1-3x$-et pedig differenciáljuk: $u=1-3x$ és $v'=\cos 3x$, tehát $u'=-3$ és $v=\frac{1}{3}\sin 3x$. A parciális integrálás szabálya szerint

$$\int(1-3x)\cos 3x\,dx=(1-3x)\frac{1}{3}\sin 3x-\int(-3)\cdot\frac{1}{3}\sin 3x\,dx=$$

$$\frac{1}{3}(1-3x)\sin 3x+\int\sin 3x\,dx=\frac{1}{3}(1-3x)\sin 3x-\frac{1}{3}\cos 3x+c.$$

10.
$$\int(4x+3)e^{2x}\,dx$$

Megoldás: A fenti feladatok mintájára az exponenciális részt integráljuk, a $4x+3$-at pedig differenciáljuk: $u=4x+3$ és $v'=e^{2x}$, tehát $u'=4$ és $v=\frac{1}{2}e^{2x}$. A parciális integrálás szabálya szerint

$$\int(4x+3)e^{2x}\,dx=(4x+3)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int 4\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx=$$

$$\frac{1}{2}(4x+3)\cdot e^{2x}-2\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}(4x+3)\cdot e^{2x}-2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}=\frac{1}{2}(4x+1)\cdot e^{2x}+c.$$

11.
$$\int(-2x-1)\ln 6x\,dx$$

Megoldás: A fenti feladatok mintájára a logaritmusos részt differenciáljuk, a $-2x-1$-et pedig integráljuk: $u=\ln 6x$ és $v'=-2x-1$, ekkor $u'=6\cdot\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$ és $v=-x^2-x$. A parciális integrálás szabálya szerint

$$\int(-2x-1)\ln 6x\,dx=\ln 6x\cdot(-x^2-x)-\int\frac{1}{x}\cdot(-x^2-x)\,dx=$$

$$-(x^2+x)\ln 6x+\int(x+1)\,dx=-(x^2+x)\ln 6x+\frac{1}{2}x^2+x+c.$$

12.
$$\int(x^2-2x+1)\ln 3x\,dx$$

Megoldás: A fenti feladatok mintájára a logaritmusos részt differenciáljuk, az x^2-2x+1-et pedig integráljuk: $u=\ln 3x$ és $v'=x^2-2x+1$, ekkor $u'=3\cdot\frac{1}{3x}=\frac{1}{x}$ és $v=\frac{1}{3}x^3-x^2+x$. A parciális integrálás szabálya szerint

$$\int(x^2-2x+1)\ln 3x\,dx=\ln 3x\cdot\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)-\int\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)dx=$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)\ln 3x-\int\left(\frac{1}{3}x^2-x+1\right)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)\ln 3x-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+c.$$

13.

$$\int (4x+6)\cos(2x+7)\,dx$$

Megoldás: A fenti feladatok mintájára a trigonometrikus részt integráljuk, a $4x+6$-ot pedig differenciáljuk: $u = 4x+6$ és $v' = \cos(2x+7)$, ekkor $u' = 4$ és $v = \frac{1}{2}\sin(2x+7)$. A parciális integrálás szabálya szerint

$$\int (4x+6)\cos(2x+7)\,dx = (4x+6)\cdot\frac{1}{2}\sin(2x+7) - \int 4\cdot\frac{1}{2}\sin(2x+7)\,dx =$$

$$(2x+3)\sin(2x+7) - 2\int \sin(2x+7)\,dx = (2x+3)\sin(2x+7) - 2\cdot\frac{1}{2}(-\cos(2x+7)) =$$

$$(2x+3)\sin(2x+7) - 2\int \sin(2x+7)\,dx = (2x+3)\sin(2x+7) + \cos(2x+7) + c.$$

14.

$$\int (3-5x)e^{4x-1}\,dx$$

Megoldás: A fenti feladatok mintájára az exponenciális részt integráljuk, a $3-5x$-et pedig differenciáljuk: $u = 3-5x$ és $v' = e^{4x-1}$, ekkor $u' = -5$ és $v = \frac{1}{4}e^{4x-1}$. A parciális integrálás szabálya szerint

$$\int (3-5x)e^{4x-1}\,dx = (3-5x)\cdot\frac{1}{4}e^{4x-1} - \int (-5)\cdot\frac{1}{4}e^{4x-1}\,dx =$$

$$\frac{1}{4}(3-5x)e^{4x-1} + \frac{5}{4}\int e^{4x-1}\,dx = \frac{1}{4}(3-5x)e^{4x-1} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}e^{4x-1} = \frac{1}{4}(3-5x)e^{4x-1} + \frac{5}{16}e^{4x-1} + c.$$

15.

$$\int \frac{2}{x^2}\ln 7x\,dx$$

Megoldás: A fenti feladatok mintájára a logaritmusos részt differenciáljuk, a $3-5x$-et pedig integráljuk: $u = \ln 7x$ és $v' = \frac{2}{x^2}$, ekkor $u' = 7\cdot\frac{1}{7x} = \frac{1}{x}$ és $v = -\frac{2}{x}$. A parciális integrálás szabálya szerint

$$\int \frac{2}{x^2}\ln 7x\,dx = \ln 7x\cdot(-\frac{2}{x}) - \int \frac{1}{x}(-\frac{2}{x})\,dx = -\frac{2}{x}\ln 7x + \int \frac{2}{x^2}\,dx = -\frac{2}{x}\ln 7x - \frac{2}{x} + c.$$

16.

$$\int (3x^2+x)\cos 4x\,dx$$

Megoldás: A fenti feladatok mintájára a trigonometrikus részt integráljuk, a $4x+6$-ot pedig differenciáljuk: $u = 3x^2+x$ és $v' = \cos 4x$, ekkor $u' = 6x+1$ és $v = \frac{1}{4}\sin 4x$. A parciális integrálás szabálya szerint

$$\int (3x^2+x)\cos 4x\,dx = (3x^2+x)\cdot\frac{1}{4}\sin 4x - \int (6x+1)\cdot\frac{1}{4}\sin 4x\,dx. \tag{3}$$

Itt új jelenséggel találkozunk: a jobboldalon álló integrált nem tudjuk közvetlenül kiszámítani – ahhoz ismét parciális integrálásra van szükség. Számítsuk tehát ki külön a jobboldalon álló integrált, parciális integrálással. A szokott módon, a trigonometrikus részt integráljuk, a $6x+1$-et differenciáljuk, vagyis $u=6x+1$ és $v'=\frac{1}{4}\sin 4x$. Ezért $u'=6$ és $v=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cos(4x)=-\frac{1}{16}\cos 4x$, és a parciális integrálás szabálya szerint

$$\int (6x+1)\cdot\frac{1}{4}\sin 4x\,dx=(6x+1)\cdot\Big(-\frac{1}{16}\cos 4x\Big)-\int 6\Big(-\frac{1}{16}\cos 4x\Big)\,dx=$$

$$-\frac{1}{16}(6x+1)\cos 4x+\frac{6}{16}\int\cos 4x\,dx=-\frac{1}{16}(6x+1)\cos 4x+\frac{3}{32}\sin 4x+c.$$

Visszatérve az eredeti feladathoz, a (3) egyenletbe visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\int (3x^2+x)\cos 4x\,dx=(3x^2+x)\cdot\frac{1}{4}\sin 4x-\int (6x+1)\cdot\frac{1}{4}\sin 4x\,dx= \tag{4}$$

$$(3x^2+x)\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{16}(6x+1)\cos 4x-\frac{3}{32}\sin 4x+C.$$

17.

$$\int (x^2+5x-4)\sin 2x\,dx$$

Megoldás: Az előző feladathoz hasonló problémával állunk szemben: mivel az x^2+5x-4 polinom másodfokú, a parciális integrálás egyszeri alkalmazásával csak egyszer kell differenciálni, tehát a fokszáma csak eggyel fog csökkenni – még egyszer kell parciális integrálást alkalmazni. Elő ször tehát az $u=x^2+5x-4$ és $v'=\sin 2x$ választással azt kapjuk, hogy $u'=2x+5$ és $v=\frac{1}{2}\cos 2x$, tehát a parciális integrálás formulája szerint

$$\int (x^2+5x-4)\sin 2x\,dx=(x^2+5x-4)\cdot\frac{1}{2}\cos 2x-\int (2x+5)\cdot\frac{1}{2}\cos 2x\,dx= \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}(x^2+5x-4)\cos 2x-\int (2x+5)\cdot\frac{1}{2}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}(x^2+5x-4)\cos 2x-\frac{1}{2}\int (2x+5)\cos 2x\,dx$$

Az utolsó integrált ismét parciálisan integráljuk: legyen $u=2x+5$, és $v'=\cos 2x$, ekkor $u'=2$ és $v=\frac{1}{2}\sin 2x$, továbbá a parciális integrálás formulája szerint

$$\int (2x+5)\cos 2x\,dx=(2x+5)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-\int 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\,dx=$$

$$(2x+5)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-\int\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}(2x+5)\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+c.$$

Ezt visszahelyettesíthetjük a (5) egyenlőségbe, s azt kapjuk, hogy az eredeti integrál

$$\int (x^2+5x-4)\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}(x^2+5x-4)\cos 2x-\frac{1}{2}\int (2x+5)\cos 2x\,dx=$$

$$-\frac{1}{2}(x^2+5x-4)\cos 2x+\frac{1}{4}(2x+5)\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

18.

$$\int (x+2)^2 \cos\frac{x}{2}\,dx$$

Megoldás: A fentiekhez hasonlóan fogunk számolni: legyen $u = (x+2)^2$ és $v' = \cos\frac{x}{2}$, ekkor $u' = 2(x+2)$ és $v = 2\sin\frac{x}{2}$. A parciális integrálás formulája alapján

$$\int (x+2)^2 \cos\frac{x}{2}\,dx = (x+2)^2 \cdot 2\sin\frac{x}{2} - \int 2(x+2)\cdot 2\sin\frac{x}{2}\,dx = \tag{6}$$

$$2(x+2)^2\sin\frac{x}{2} - 4\int (x+2)\sin\frac{x}{2}\,dx.$$

Az utolsó integrált parciálisan integráljuk: az $u = x+2$, $v' = \sin\frac{x}{2}$ választással $u' = 1$, $v = -2\cos\frac{x}{2}$, tehát a parciális integrálás szabálya szerint

$$\int (x+2)\sin\frac{x}{2}\,dx = (x+2)\cdot\Big(-2\cos\frac{x}{2}\Big) + \int 2\cos\frac{x}{2}\,dx = -2(x+2)\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2} + c.$$

Visszahelyettesítve (6)-be, azt kapjuk, hogy az eredeti integrál

$$\int (x+2)^2\cos\frac{x}{2}\,dx = 2(x+2)^2\sin\frac{x}{2} - 4\int (x+2)\sin\frac{x}{2}\,dx =$$

$$2(x+2)^2\sin\frac{x}{2} + 8(x+2)\cos\frac{x}{2} - 16\sin\frac{x}{2} + C.$$

19.

$$\int (2x^2+3x-1)e^{6x+5}\,dx$$

Megoldás: A korábbi feladatok tapasztalatai alapján most is kétszeri parciális integrálásra lesz szükség: először, szoká szerint, az exponenciális részt integráljuk, a $2x^2+3x-1$ kifejezést pedig differenciáljuk, azaz $u = 2x^2+3x-1$ és $v' = e^{6x+5}$, amiből $u' = 4x+3$ és $v = \frac{1}{6}e^{6x+5}$ adódik, s a parciális integrálás szabálya szerint

$$\int (2x^2+3x-1)e^{6x+5}\,dx = (2x^2+3x-1)\cdot\frac{1}{6}e^{6x+5} - \int (4x+3)\cdot\frac{1}{6}e^{6x+5}\,dx = \tag{7}$$

$$\frac{1}{6}(2x^2+3x-1)e^{6x+5} - \frac{1}{6}\int (4x+3)e^{6x+5}\,dx.$$

Az utolsó tagot ismét parciálisan integráljuk: az $u = 4x+3$ és $v' = e^{6x+5}$ választással $u' = 4$ és $v = \frac{1}{6}e^{6x+5}$, ezért a parciális integrálás szabálya szerint

$$\int (4x+3)e^{6x+5}\,dx = (4x+3)\cdot\frac{1}{6}e^{6x+5} - \int 4\cdot\frac{1}{6}e^{6x+5}\,dx =$$

$$\frac{1}{6}(4x+3)e^{6x+5} - \frac{2}{3}\int e^{6x+5}\,dx = \frac{1}{6}(4x+3)e^{6x+5} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}e^{6x+5} = \frac{1}{6}(4x+3)e^{6x+5} - \frac{1}{9}e^{6x+5} + c.$$

Visszahelyettesítve a (7) egyenlőségbe, megkapjuk az eredeti feladat megoldását:

$$\int (2x^2+3x-1)e^{6x+5}\,dx = \frac{1}{6}(2x^2+3x-1)e^{6x+5} - \frac{1}{6}\int (4x+3)e^{6x+5}\,dx =$$

$$\frac{1}{6}(2x^2+3x-1)e^{6x+5} - \frac{1}{36}(4x+3)e^{6x+5} + \frac{1}{54}e^{6x+5} + C.$$

20.

$$\int \ln^2 5x \, dx$$

Megoldás: Ez a feladat látszólag nem tartozik egyetlen fenti típusba se, de az ln függvény megjelenése azt sugallja, hogy ,,az ln-t differenciálni kell". Igen ám, de elsőre úgy tűnik, hogy az $\ln^2 5x = \ln 5x \cdot \ln 5x$,,természetes" szorzattá alakítás miatt az egyik tényezőt minenképpen integrálni kéne... Biztos, hogy ezt a ,,természetes" szorzattá alakítást kell választanunk? Egyszer már bevált a ,,bárgyú" választás – próbáljuk meg újra! Legyen $u = \ln^2 5x$, és $v' = 1$, ekkor $u' = 2\ln 5x \cdot 5 \cdot \frac{1}{5x} = \frac{2}{x} \ln 5x$, és $v = x$. A parciális integrálás formulája szerint

$$\int \ln^2 5x \, dx = \ln^2 5x \cdot x - \int \frac{2}{x} \ln 5x \cdot x \, dx = x \ln^2 5x - 2 \int \ln 5x \, dx. \tag{8}$$

Az utolsó tagban szereplő integrált egyszer már kiszámoltuk a fentiekben, lásd (2):

$$\int \ln 5x \, dx = x \ln 5 + x \ln x - x + c,$$

ezért az eredeti integrál:

$$\int \ln^2 5x \, dx = x \ln^2 5x - 2 \int \ln 5x \, dx =$$

$$x \ln^2 5x - 2x \ln 5 - 2x \ln x + 2x + C = x \ln^2 5x - 2x \ln 5x + 2x + C.$$

21.

$$\int 3x \ln^2 2x \, dx$$

Megoldás: A fenti tapasztalatok alapján az az $\ln^2 2x$ tényezőt differenciáljuk: $u = \ln^2 2x$, és $v' = 3x$, amiből $u' = 2\ln 2x \cdot 2 \cdot \frac{1}{2x} = \frac{2}{x} \ln 2x$, és $v = \frac{3x^2}{2}$ adódik. A parciális integrálás képlete szerint

$$\int 3x \ln^2 2x \, dx = \ln^2 2x \cdot \frac{3x^2}{2} - \int \frac{2}{x} \ln 2x \cdot \frac{3x^2}{2} \, dx = \tag{9}$$

$$\frac{3x^2}{2} \ln^2 2x - 3 \int x \ln 2x \, dx.$$

Az utolsó tagban szereplő integrált ismét parciális integrálással számítjuk ki: természetesen az ln-es részt differenciáljuk, tehát $u = \ln 2x$ és $v' = x$, tehát $u' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$, és $v = \frac{x^2}{2}$. A parciális integrálási formula alapján tehát

$$\int x \ln 2x \, dx = \ln 2x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln 2x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln 2x - \frac{x^2}{4} + c.$$

A (9) egyenlőségbe való visszahelyettesítéssel kapjuk az eredeti feladat megoldását:

$$\int 3x \ln^2 2x \, dx = \frac{3x^2}{2} \ln^2 2x - 3 \int x \ln 2x \, dx =$$

$$\frac{3x^2}{2} \ln^2 2x - 3\frac{x^2}{2} \ln 2x + 3\frac{x^2}{4}$$