Integrálás helyettesítéssel

Számolja ki az alábbi integrálokat!

1.

$$\int \cos(2x-3)\,dx$$

Megoldás: Az integrálást helyettesítéssel végezzük el. Ez a módszer az összetett függvény differenciálásának bizonyos értelmű megfordítása. Általában nem könnyű felismerni, hogy melyek azok az integrálok, amelyeket helyettesítéssel célszerű kiszámítani – elsősorban gyakorlással lehet elsajátítatni ezt a technikát. Ugyanakkor van néhány egyszerű alapelv, amelyeket követve jártasságra tehetünk szert ennek a módszernek az alkalmazásában.

Mindenekelőtt felidézzük az összetett függvény differenciálási szabályát – ez tömören így néz ki:

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x),$$

vagy más jelöléssel

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x),$$

Ha ennek az egyenlőségnek mindkét oldalát integráljuk, akkor az

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx} f\big(g(x)\big)$$

egyenlőséget kapjuk. A határozatlan integrál (vagy másszóval primitív függvény) definíciója szerint egy deriváltnak az integrálja, nem más, mint az eredeti függvény, plusz egy tetszőleges konstans, tehát

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f\big(g(x)\big) + c.$$

Ebben az a lényeges, hogy az $f'(g(x))$ integrálja nem $f(g(x))$ – tehát, pl. a feladatunkban, a $\cos(2x-3)$ integrálja nem $\sin(2x-3)$! Persze, hogy nem, hiszen a $\sin(2x-3)$ differenciálásakor nem csak a sin függvényt kell differenciálni, hanem még meg is kell szorozni a belső függvény, a $2x-3$ deriváltjával, ami 2. Ennek alapján viszont arra gondolhatunk, hogy ha az integráláskor mindent ,,visszafelé csinálunk", mint a differenciáláskor, akkor itt talán a cos integrálásakor még el kéne osztani a belső függvény deriváltjával, vagyis 2-vel? A gondolat jó: valóban, a $\cos(2x-3)$ függvény határozatlan integrálja $\sin(2x-3) \cdot \frac{1}{2}$ – a külső függvény határozatlan integrálja osztva a belső függvény deriváltjával. Sajnos, azért nem lehetünk teljesen boldogok: ha ugyanezt a $\cos(2x^2-3)$ függvénnyel próbáljuk eljátszani, akkor a $\sin(2x^2-3)$-at kellene elosztani a belső függvény deriváltjával, $4x$-el, ám azonnal láthatjuk, hogy az így kapott $\frac{\sin(2x^2-3)}{4x}$ függvény deriváltja nem $\cos(2x^2-3)$. Hamar rájöhetünk, hogy ennek az az oka, hogy az első esetben a $2x-3$ deriváltja 2, tehát konstans, nem függ x-től, míg a második esetben $4x$, ami nem konstans, függ x-től. Az integrálásból a konstansok kiemelhetők, a nem konstans függvények pedig nem. Ezért a $\cos(2x-3)$ függvény integrálása egyszerű, a $\cos(2x^2-3)$ függvényé pedig nem: az összetett függvény differenciálási szabálya alapján a $\cos(2x^2-3) \cdot 4x$ függvény integrálása volna egyszerű, hiszen az a fenti formulák szerint éppen $\sin(2x^2-3)+c$ volna – ami könnyen ellenőrizhető.

Akkor mit tegyünk, ha nekünk a $\cos(2x^2-3)$ függvényt kell integrálni? Bár minden folytonos függvénynek van primitív függvénye, de arra nincs garancia, hogy az kifejezhető elemi függvények segítségével – magyarul, nem biztos, hogy a ,,szokásos" formulákkal fel tudjuk írni. Tudomásul kell vennünk, hogy ,,bármilyen" képletet tudunk differenciálni, de az integrálásra ez nem igaz. Pl. az e^{-x} függvény integrálása egyszerű, hiszen a belső függvény deriváltja -1, azaz konstans, s a fentiek alapján a határozatlan integrálja $\frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$. Ezzel szemben meg lehet mutatni, hogy az e^{-x^2} függvény határozatlan integrálja nem fejezhető ki elemi függvényekkel.

Ez a bevezető azt kívánta érzékeltetni, hogy az integrálás jóval komplikáltabb, mint a differenciálás – esetenként nem is végezhető el. A helyettesítéses integrálás egy olyan eljárás, amely sok esetben alkalmazható – de az alkalmazásához némi kreativitásra van szükség. A lényege az, hogy az integrációs változó alkalmas helyettesítésével az integrálandó függvényt $f'(g(t)) \cdot g'(t)$ alakra akarjuk hozni, mert ezt nagyon egyszerű integrálni: a határozatlan integrált csak össze kell rakni az f és g függvényből. A leglényegesebb az alkalmas helyettesítés felismerése. Pl. a most megoldandó feladatban a $\cos x$ fggvényben x helyére $2x-3$ van behelyettesítve: célszerűnek látszik ezt választani új változónak, pl. t-nek, tehát $t = 2x - 3$. A $\cos(2x - 3)$ határozatlan integrálása azt jelenti, hogy olyan $f(x)$ függvényt keresünk, aminek a deriváltja $\cos(2x - 3)$, tehát
$$f'(x) = \cos(2x - 3).$$

Ha ezt az új, t változó segítségével akarjuk kifejezni, akkor a $t = t(x)$ függvény inverzére van szükség: $x = \frac{t+3}{2}$, vagyis a fenti egyenlőség így írható:

$$f'\left(\frac{t+3}{2}\right) = \cos t.$$

Az összetett függvény fent idézett differenciálási szabályát figyelembe véve a baloldalt könnyen $f'(g(t)) \cdot g'(t)$ alakúra hozhatjuk, hiszen a $g(t) = \frac{t+3}{2}$ jelöléssel $g'(t) = \frac{1}{2}$, ezzel mindkét oldalt beszorozva
$$f'\left(\frac{t+3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos t,$$
s ezt az egyenletet könnyű integrálni:

$$f\left(\frac{t+3}{2}\right) = \int f'\left(\frac{t+3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\, dt = \int \frac{1}{2}\cos t\, dt = \frac{1}{2}\sin t + c$$

Végül visszahelyettesítjük t helyére a $2x - 3$ kifejezést:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x - 3) + c.$$

Ennek alapján érthetővé válik a helyettesítéses integrálás képlete: ha az $\int f(x)\, dx$ integrálban az $x = g(t)$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))g'(t)\, dt \tag{1}$$

adódik. Persze, az a kérdés, hogy a jobboldalon álló integrál mennyire ,,kiszámítható" – ez a g függvény megválasztásán múlik. Vannak azonban olyan integráltípusok, amelyeknél könnyen meg lehet mondani, hogy milyen g függvényt kell választani. Megjegyezzük, hogy a g függvénynek invertálhatónak kell lenni ahhoz, hogy a jobboldali integrál kiszámítása után az eredményben szereplő t változóról visszatérhessünk az eredeti x változóra a $t = g^{-1}(x)$ helyettesítéssel.

A gyakorlatban a helyettesítést a g függvény inverzével szoktuk megadni, tehát a $t = g^{-1}(x)$ formulával, ahol a g^{-1} a helyettesíteni kívánt, általában ,,bonyolult" kifejezés, az integrálandó függvény ,,legcsúnyább" része... Például, a feladatunkban kiszámítandó $\int \cos(2x-3)\,dx$ integrálban a $2x-3$ helyére t-t helyettesítünk, azaz $g^{-1}(x) = 2x - 3 = t$, tehát $x = \frac{t+3}{2} = g(t)$, vagyis $g'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$, s ezért a fenti (1) formulában az $f(x) = \cos(2x-3)$ jelöléssel

$$\int f(x)\,dx = \int \cos(2x-3)\,dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{2}\,dt.$$

Vagyis az $f(x)$-ben x helyére $g(t)$-t írunk, a dx helyére pedig azt, amit a $2x - 3 = t$ egyenletből $\frac{dx}{dt}$ kiszámításával, majd a dx formális kifejezésével kapunk:

$$2x - 3 = t,$$

tehát

$$2\frac{dx}{dt} = 1,$$

azaz $dx = \frac{1}{2}dt$. A számítás részletei:

$$\int \cos(2x-3)\,dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + c = \frac{1}{2}\sin(2x-3) + c.$$

A végén tehát visszatérünk az eredeti változóra. A további feladatokban ezt az eljárást alkalmazzuk.

2.

$$\int \sin(8x+\pi)\,dx$$

Megoldás: A ,,legcsúnyább" rész a $8x+\pi$, ezt fogjuk t-vel jelölni: $t = 8x + \pi$, azaz, az előző feladat jelöléseit használva $g^{-1}(x) = t = 8x + \pi$, vagyis $g(t) = x = \frac{t-\pi}{8}$, és $\frac{dx}{dt} = g'(t) = \frac{1}{8}$. Formálisan tehát a fenti integrálban $8x + \pi$ helyett t-t, dx helyett pedig a $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{8}$ alapján $dx = \frac{1}{8}dt$-t kell írnunk. Ez a ,,formális" írásmód teljességgel megalapozott az (1) egyenlőség alapján, valamint könnyen megjegyezhető. Így azt kapjuk, hogy

$$\int \sin(8x+\pi)\,dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{8}\,dt = \frac{1}{8}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{8}\cos t + c = -\frac{1}{8}\cos(8x+\pi) + c.$$

3.

$$\int \cos\frac{6x}{4}\,dx$$

Megoldás: A ,,legcsúnyább" rész a $\frac{6x}{4}$, ezt fogjuk t-vel jelölni: $t = \frac{6x}{4}$, azaz, az előző feladat jelöléseit használva $g^{-1}(x) = t = \frac{6x}{4}$, vagyis $g(t) = x = \frac{4t}{6}$, és $\frac{dx}{dt} = g'(t) = \frac{4}{6}$. Formálisan tehát a fenti integrálban $\frac{6x}{4}$ helyett t-t, dx helyett pedig a $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{6}$ alapján $dx = \frac{4}{6}\,dt$-t kell írnunk:

$$\int \cos\frac{6x}{4}\,dx = \int \cos t \cdot \frac{4}{6}\,dt = \frac{2}{3}\int \cos t\,dt = \frac{2}{3}\sin t + c = \frac{2}{3}\sin\frac{6x}{4} + c = \frac{2}{3}\sin\frac{3x}{2} + c.$$

4.

$$\int \sqrt[4]{4x-2}\,dx$$

Megoldás: Az egész kifejezés elég ,,csúnya” ahhoz, hogy t-vel jelöljük: legyen $t = \sqrt[4]{4x-2}$, ekkor $t^4 = 4x - 2$, és $x = \frac{t^4+2}{4}$, valamint $\frac{dx}{dt} = t^3$, ami formálisan $dx = t^3\,dt$ módon írható. Elvégezve ezt a helyettesítést azt kapjuk, hogy

$$\int \sqrt[4]{4x-2}\,dx = \int t \cdot t^3\,dt = \int t^4\,dt = \frac{t^5}{5} + c = \frac{\sqrt[4]{(4x-2)^5}}{5} + c.$$

Megjegyezzük, hogy a $t = 4x - 2$ helyettesítéssel is könnyen boldogulunk – ennek ellenőrzését az olvasóra bízzuk.

5.

$$\int \frac{(4-7x)^5}{6}\,dx$$

Megoldás: Itt nem biztos, hogy célszerű az egész kifejezést t-vel helyettesíteni, mert akkor esetleg az x kifejezésekor gyökös formulák léphetnek fel – legyen inkább $t = 4 - 7x$, ekkor $x = \frac{4-t}{7}$, vagyis $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{7}$, ezért $dx = -\frac{1}{7}\,dt$, s az integrál

$$\int \frac{(4-7x)^5}{6}\,dx = -\int \frac{t^5}{6} \cdot \frac{1}{7}\,dt = -\frac{1}{42}\int t^5\,dt = -\frac{t^6}{252} + c = -\frac{1}{252}(4-7x)^6 + c.$$

Próbáljuk ki, hogy mi lenne az egész kifejezés helyettesítésekor! Legyen $t = \frac{(4-7x)^5}{6}$, ekkor $x = \frac{4-\sqrt[5]{6t}}{7} = \frac{4}{7} - \frac{\sqrt[5]{6}t^{\frac{1}{5}}}{7}$, amiből a $\frac{dx}{dt}$-re elég kellemetlen kifejezést kapunk – jobb döntés volt, amit az előbb választottunk.

6.

$$\int \sqrt[4]{(4x-7)^5}\,dx$$

Megoldás: Próbálkozzunk ismét az előzőhöz hasonló helyettesítéssel: $t = 4x - 7$, $dx = \frac{1}{4}\,dt$, ekkor

$$\int \sqrt[4]{(4x-7)^5}\,dx = \int t^{\frac{5}{4}} \cdot \frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{4}\int t^{\frac{5}{4}}\,dt = \frac{1}{4}\frac{t^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + c = \frac{1}{9}t^{\frac{9}{4}} + c = \frac{1}{9}(4x-7)^{\frac{9}{4}} + c$$

7.

$$\int \frac{2}{(3x-4)^6}\,dx$$

Megoldás: Még egy kicsit gyorsíthatjuk a számításokat, ha figyelembe vesszük, hogy az inverz függvény deriváltja egyenlő az eredeti függvény deriváltjának a reciprokával – a változók megfelelő helyettesítése mellett. Ez formálisan annyit jelent, hogy $\frac{dx}{dt}$ a $\frac{dt}{dx}$ reciproka, vagyis a $\frac{dx}{dt}$ és $\frac{dt}{dx}$ kifejezésekkel úgy számolhatunk, mint a közönséges törtekkel. Legyen tehát $t = 3x - 4$, ekkor $\frac{dt}{dx} = 3$, vagyis $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$, és $dx = \frac{1}{3}\,dt$. Ezért az integrál

$$\int \frac{2}{(3x-4)^6}\,dx = \int \frac{2}{t^6} \cdot \frac{1}{3}\,dt = \frac{2}{3}\int t^{-6}\,dt = \frac{2}{3}\int \frac{t^{-5}}{-5}\,dt = -\frac{2}{15}t^{-5} + c = -\frac{2}{15(3x-4)^5} + c.$$

8.

$$\int 5^{6-4x}\,dx$$

Megoldás: Legyen $t = 6 - 4x$, ekkor $dt = -4dx$, és $dx = -\frac{1}{4}\,dt$. Ebből adódóan

$$\int 5^{6-4x}\,dx = \int 5^t \cdot \big(-\frac{1}{4}\big)\,dt = -\frac{1}{4}\int 5^t\,dt = -\frac{1}{4}\frac{5^t}{\ln 5} + c = -\frac{5^{6-4x}}{4\ln 5} + c.$$

9.

$$\int 2\cdot 3^{4x-1}\,dx$$

Megoldás: Legyen $t = 4x - 1$, ekkor $dt = 4dx$, $dx = \frac{1}{4}\,dt$, tehát

$$\int 2\cdot 3^{4x-1}\,dx = \int 2\cdot 3^t\cdot\frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{2}\int 3^t\,dt = \frac{1}{2}\frac{3^t}{\ln 3} + c = \frac{3^t}{2\ln 3} + c = \frac{3^{4x-1}}{2\ln 3} + c.$$

10.

$$\int 8\cdot e^{2-x}\,dx$$

Megoldás: Legyen $t = 2 - x$, ekkor $dt = -dx$, $dx = -dt$, tehát

$$\int 8\cdot e^{2-x}\,dx = -\int 8\cdot e^t\,dt = -8e^t + c = -8e^{2-x} + c.$$

11.

$$\int \frac{3}{\cos^2(3-4x)}\,dx$$

Megoldás: Legyen $t = 3 - 4x$, ekkor $dt = -4dx$, $dx = -\frac{1}{4}\,dt$. Ebből adódóan

$$\int \frac{3}{\cos^2(3-4x)}\,dx = -\int \frac{3}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{4}\,dt = -\frac{3}{4}\int\frac{1}{\cos^2 t}\,dt =$$

$$-\frac{3}{4}\tan t + c = -\frac{3}{4}\tan(3-4x) + c.$$

12.

$$\int \frac{5}{\sin^2(1+2x)}\,dx$$

Megoldás: Legyen $t = 1 + 2x$, ekkor $dt = 2dx$, $dx = \frac{1}{2}\,dt$, és

$$\int \frac{5}{\sin^2(1+2x)}\,dx = \int\frac{5}{\sin^2 t}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{5}{2}\int\frac{1}{\sin^2 t}\,dt =$$

$$-\frac{5}{2}\cot t + c = -\frac{5}{2}\cot(1+2x) + c.$$

13.

$$\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x+6}\,dx$$

Megoldás: Helyettesítsük a ,,legcsúnyább" részt: $t = x^3 - 2x + 6$, ekkor $\frac{dt}{dx} = 3x^2 - 2$, azaz $dt = (3x^2-2)\,dx$ – szerencsénk van, ez a kifejezés pont megjelenik az integrálban:

$$\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x+6}\,dx = \int\frac{1}{x^3-2x+6}\cdot(3x^2-2)\,dx = \int\frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + c = \ln|x^3-2x+6| + c.$$

14.

$$\int \frac{x}{3x^2+2}\,dx$$

Megoldás: Az előző feladat mintájára a célszerű helyettesítés: $t = 3x^2+2$, így $\frac{dt}{dx} = 6x$, vagy $dt = 6x\,dx$, illetve $x\,dx = \frac{1}{6}\,dt$. Láthatjuk, hogy bizonyos esetekben, nem feltétlenül a dx-et, hanem az integrálandó függvénytől függően esetleg a dx-nek valamilyen x-et tartalmazó kifejezéssel való szorzatát tudjuk helyettesíteni, mint pl. itt $x\,dx$-et. Ezért

$$\int \frac{x}{3x^2+2}\,dx = \int \frac{1}{3x^2+2}\cdot x\,dx = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6}\,dt = \frac{1}{6}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{6}\ln|t| + c = \frac{1}{6}\ln|3x^2+2| + c.$$

15.

$$\int \frac{8x}{1+5x^2}\,dx$$

Megoldás: Az előző feladathoz hasonlóan legyen $t = 1+5x^2$, ekkor $\frac{dt}{dx} = 10x$, s ezért $\frac{1}{10}\,dt = x\,dx$. Következésképpen

$$\int \frac{8x}{1+5x^2}\,dx = \int \frac{8}{1+5x^2}\cdot x\,dx = \int \frac{8}{t}\cdot\frac{1}{10}\,dt = \frac{4}{5}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{4}{5}\ln|t| + c = \frac{4}{5}\ln|1+5x^2| + c.$$

16.

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-5}\,dx$$

Megoldás: Az előző gondolatmenetet követjük: legyen $t = e^{3x}-5$, ekkor $\frac{dt}{dx} = 3e^{3x}$, s így $\frac{1}{3}\,dt = e^{3x}\,dx$. Végül

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-5}\,dx = \int \frac{1}{e^{3x}-5}\cdot e^{3x}\,dx = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\ln|t| + c = \frac{1}{3}\ln|e^{3x}-5| + c.$$

17.

$$\int \frac{3\cos x}{2+7\sin x}\,dx$$

Megoldás: Az előző feladatok mintájára legyen $t = 2+7\sin x$, ekkor $\frac{dt}{dx} = 7\cos x$, vagyis $dt = 7\cos x\,dx$, vagy $\frac{1}{7}\,dt = \cos x\,dx$. Ezért

$$\int \frac{3\cos x}{2+7\sin x}\,dx = 3\int \frac{1}{2+7\sin x}\cdot\cos x\,dx = 3\int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{7}\,dt = \frac{3}{7}\int \frac{1}{t}\,dt =$$

$$\frac{3}{7}\ln|t| + c = \frac{3}{7}\ln|2+7\sin x| + c.$$

18.

$$\int \frac{8\sin 5x}{2+3\cos 5x}\,dx$$

Megoldás: Az előző feladatok mintájára legyen $t = 2+3\cos 5x$, ekkor $\frac{dt}{dx} = -15\sin 5x$, tehát $-\frac{1}{15}\,dt = \sin 5x\,dx$, ezért

$$\int \frac{8\sin 5x}{2+3\cos 5x}\,dx = 8\int \frac{1}{2+3\cos 5x}\cdot\sin 5x\,dx = 8\int \frac{1}{t}\cdot\Big(-\frac{1}{15}\Big)\,dt = -\frac{8}{15}\int \frac{1}{t}\,dt =$$

$$-\frac{8}{15}\ln|t| + c = -\frac{8}{15}\ln|2+3\cos 5x| + c.$$

19.

$$\int \frac{2e^{-x}}{3+5e^{-x}}\, dx$$

Megoldás: Az előző feladatok mintájára legyen $t = 3+5e^{-x}$, ekkor $\frac{dt}{dx} = -5e^{-x}$, tehát $-\frac{1}{5}\, dt = e^{-x}\, dx$, s ezért

$$\int \frac{2e^{-x}}{3+5e^{-x}}\, dx = 2\int \frac{1}{3+5e^{-x}} \cdot e^{-x}\, dx = 2\int \frac{1}{t} \cdot \big(-\frac{1}{5}\big)\, dt = -\frac{2}{5}\int \frac{1}{t}\, dt =$$

$$-\frac{2}{5}\ln|t| + c = -\frac{2}{5}\ln(3+5e^{-x}) + c.$$

20.

$$\int_{-6}^{-2} \frac{5}{x-3}\, dx$$

Megoldás: Először a megfelelő határozatlan integrált számítjuk ki, a fentiek mintájára: legyen $t = x-3$, ekkor $\frac{dt}{dx} = 1$, azaz $dt = dx$, és

$$\int \frac{5}{x-3}\, dx = \int \frac{5}{t}\, dt = 5\ln|t| + c = 5\ln|x-3| + c.$$

Ezért a Newton–Leibniz formula alapján

$$\int_{-6}^{-2} \frac{5}{x-3}\, dx = \big[5\ln|x-3|\big]_{-6}^{-2} = 5\ln 5 - 5\ln 9 = 5\ln\frac{5}{9}.$$

Egy másik lehetőség, hogy a helyettesítésnek megfelelően megváltoztatjuk az integrálás határait: mivel $t = x-3$, ezért ha $x = -6$, akkor $t = -9$, ez lesz az új alsó határ, illetve, ha $x = -2$, akkor $t = -5$, ez lesz az új felső határ, így a következőképpen számolhatunk:

$$\int_{-6}^{-2} \frac{5}{x-3}\, dx = \int_{-9}^{-5} \frac{5}{t}\, dt = \big[5\ln|t|\big]_{-9}^{-5} = 5\ln 5 - 5\ln 9 = 5\ln\frac{5}{9}.$$

21.

$$\int_0^5 e^{-4x}\, dx$$

Megoldás: Legyen $t = -4x$, ekkor $\frac{dt}{dx} = -4$, tehát $-\frac{1}{4}\, dt = dx$. Továbbá, ha $x = 0$, akkor $t = 0$, az új alsó határ, s ha $x = 5$, akkor $t = -20$, az új felső határ. Végül

$$\int_0^5 e^{-4x}\, dx = \int_0^{-20} e^t \cdot \big(-\frac{1}{4}\big)\, dt = -\frac{1}{4}\int_0^{-20} e^t\, dt = -\frac{1}{4}\big[e^t\big]_0^{-20} = -\frac{1}{4}(e^{-20} - 1).$$

22.

$$\int_{-2}^{-1} \frac{36x}{3x^2-15}\, dx$$

Megoldás: Legyen $t = 3x^2 - 15$, ekkor $\frac{dt}{dx} = 6x$, azaz $6dt = 36x\, dx$. Az új határok: ha $x = -2$, akkor $t = -3$, ha pedig $x = -1$, akkor $t = -12$. Tehát az integrál:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{36x}{3x^2-15}\, dx = \int_{-3}^{-12} \frac{6}{t}\, dt = \big[6\ln|t|\big]_{-3}^{-12} = 6\ln 12 - 6\ln 3 = 6\ln\frac{12}{3} = 6\ln 4.$$

Itt lényeges az, hogy a $[-2,-1]$ integrációs intervallumon a helyettesítést leíró $t = 3x^2 - 15$ függvény kölcsönösen egyértelmű. Ha pl. a következő integrált kellene kiszámítanunk:

$$\int_{-1}^{1} \frac{36}{3x^2-15}\,dx,$$

és ugyanezt a helyettesítést alkalmaznánk, akkor az új határok $x = \pm 1$ esetén megegyeznek, így a helyettesített integrál értékére 0 adódna, ami lehetetlen, hiszen könnyű látni, hogy az integrálandó függvény a $[-1,1]$ intervallumon mindenütt negatív, így az integrálja nem lehet 0. Ennek az az oka, hogy a helyettesítést leíró $x \mapsto 3x^2 - 15$ függvény a $[-1,1]$ intervallumon nem kölcsönösen egyértelmű, tehát ezzel a helyettesítéssel a helyettesítéses integrálás nem működik..

23.

$$\int_{0}^{2} \frac{15}{8x+13}\,dx$$

Megoldás: Legyen $t = 8x + 13$, ekkor $\frac{dt}{dx} = 8$, ezért $\frac{1}{8}\,dt = dx$, másrészt $x = 0$ esetén $t = 13$, $x = 2$ esetén pedig $t = 29$. Így a számításunk:

$$\int_{0}^{2} \frac{15}{8x+13}\,dx = \int_{13}^{29} \frac{15}{t} \cdot \frac{1}{8}\,dt = \frac{15}{8}\big[\ln|t|\big]_{13}^{29} = \frac{15}{8}\ln\frac{29}{13}.$$

24.

$$\int_{-7}^{0} \frac{10}{\sqrt{4-3x}}\,dx$$

Megoldás: A szokott módon legyen $t = \sqrt{4-3x}$, ekkor $\frac{dt}{dx} = -\frac{3}{2\sqrt{4-3x}}$, vagyis $-\frac{20}{3}\,dt = \frac{10}{\sqrt{4-3x}}\,dx$. Másrészt, az új határok $x = -7$ esetén $t = 5$, és $x = 0$ esetén $t = 2$, tehát

$$\int_{-7}^{0} \frac{10}{\sqrt{4-3x}}\,dx = \int_{5}^{2} \Big(-\frac{20}{3}\Big)\,dt = -\frac{20}{3}\int_{5}^{2} dt = -\frac{20}{3}\big[t\big]_{5}^{2} = -\frac{20}{3}(2-5) = 20.$$

25.

$$\int_{2}^{8} \frac{x^4-2}{10x-x^5}\,dx$$

Megoldás: A szokott módon számolunk: $t = 10x - x^5$, ekkor $\frac{dt}{dx} = 10 - 5x^4$, következésképpen $-\frac{1}{5}\,dt = (x^4-2)\,dx$. Ezért

$$\int \frac{x^4-2}{10x-x^5}\,dx = -\frac{1}{5}\int \frac{1}{t}\,dt = -\frac{1}{5}\ln|10x-x^5| + c = -\frac{1}{5}\ln|t| + c.$$

Ezért a határozott integrál

$$\int_{2}^{8} \frac{x^4-2}{10x-x^5}\,dx = -\frac{1}{5}\big[\ln|t|\big]_{2}^{8} = -\frac{1}{5}\big[\ln|10x-x^5|\big]_{2}^{8} = -\frac{1}{5}(\ln 32688 - \ln 12) \approx -1,582.$$

26.

$$\int_{0}^{1} \frac{(4x+13)^5}{9}\,dx$$

Megoldás: Legyen $t = 4x + 13$, ekkor $\frac{dt}{dx} = 4$, vagyis $\frac{1}{4}\,dt = dx$. Az új határok: ha $x = 0$, akkor $t = 13$, ha $x = 1$, akkor $t = 17$, ezért

$$\int_0^1 \frac{(4x+13)^5}{9}\,dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot\int_{13}^{17} t^5\,dt = \frac{1}{36}\Big[\frac{t^6}{6}\Big]_{13}^{17} = \frac{1}{216}(17^6 - 13^7) \approx 89402.$$

27.

$$\int_0^\pi \cos\frac{2x}{5}\,dx$$

Megoldás: Legyen $t = \frac{2x}{5}$, ekkor $\frac{dt}{dx} = \frac{2}{5}$, tehát $\frac{5}{2}\,dt = dx$, az új határok pedig $x = 0$ esetén $t = 0$, $x = \pi$ esetén pedig $t = \frac{2\pi}{5}$. Ezért

$$\int_0^\pi \cos\frac{2x}{5}\,dx = \frac{5}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{5}} \cos t\,dt = \frac{5}{2}\big[\sin t\big]_0^{\frac{2\pi}{5}} = \frac{5}{2}\sin\frac{2\pi}{5} \approx 2,3776.$$

28.

$$\int_0^{\frac{\pi}{20}} \frac{\sin 5x}{\cos 5x}\,dx$$

Megoldás: Legyen $t = \cos 5x$, ekkor $\frac{dt}{dx} = -5\cdot\sin 5x$, vagyis $-\frac{1}{5}\,dt = \sin 5x\,dx$. Másrészt $x = 0$ esetén $t = 1$, és $x = \frac{\pi}{20}$ esetén $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért

$$\int_0^{\frac{\pi}{20}} \frac{\sin 5x}{\cos 5x}\,dx = -\frac{1}{5}\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t}\,dt = -\frac{1}{5}\big[\ln|t|\big]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{5}(\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1) \approx 0,0693.$$

29.

$$\int_{-2}^0 \frac{12}{(x+3)^5}\,dx$$

Megoldás: Legyen $t = x + 3$, tehát $dt = dx$, s a határok: $x = -2$ esetén $t = 1$, $x = 0$ esetén pedig $t = 3$, ezért

$$\int_{-2}^0 \frac{12}{(x+3)^5}\,dx = \int_1^3 \frac{12}{t^5}\,dt = 12\int_1^3 t^{-5}\,dt = 12\Big[\frac{t^{-4}}{-4}\Big]_1^3 = 3(1 - \frac{1}{81}) = \frac{80}{27}.$$

30.

$$\int_0^{\ln 12} (3 + 2e^x)^2\,dx$$

Megoldás: Itt egyelőre nincs szükség helyettesítésre:

$$\int_0^{\ln 12} (3+2e^x)^2\,dx = \int_0^{\ln 12} (9 + 12e^x + 4e^{2x})\,dx = \big[9x + 12e^x\big]_0^{\ln 12} + 4\int_0^{\ln 12} e^{2x}\,dx.$$

Az utolsó tagban legyen $t = 2x$, ekkor $\frac{1}{2}dt = dx$, a határok pedig $x = 0$ esetén $t = 0$, és $x = \ln 2$ esetén $t = 2\ln 2$, azaz

$$\int_0^{\ln 12} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\ln 12} e^t\,dt = \frac{1}{2}\big[e^t\big]_0^{2\ln 12} = \frac{1}{2}(144 - 1) = \frac{143}{2}.$$

Visszatérve az eredeti integrálra

$$\int_0^{\ln 12} (3+2e^x)^2\,dx = \left[9x + 12e^x\right]_0^{\ln 12} + 4\int_0^{\ln 12} e^{2x}\,dx =$$

$$9\ln 12 + 144 - 12 + 4\frac{143}{2} = 9\ln 12 + 418 \approx 440,36.$$

31.

$$\int_1^5 \frac{x^2 - e^{-3x}}{x^3 + e^{-3x}}\,dx$$

Megoldás: Legyen $t = x^3 + e^{-3x}$, ekkor $\frac{1}{3}\,dt = (x^2 - e^{-3x})\,dx$, ezért

$$\int \frac{x^2 - e^{-3x}}{x^3 + e^{-3x}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}\ln|t| + c = \frac{1}{3}\ln(x^3 + e^{-3x}) + c,$$

ezért

$$\int \frac{x^2 - e^{-3x}}{x^3 + e^{-3x}}\,dx = \frac{1}{3}\big[\ln(x^3 + e^{-3x})\big]_1^5 = \frac{1}{3}\ln\frac{125 + e^{-15}}{1 + e^{-3}} \approx 1,5932.$$