MATEMATIKA I.
Integrálás téglalaptartomány felett

1. Számolja ki az alábbi kettős integrált!

$$\int_{-1}^{2}\Big(\int_{0}^{1}(x+y+2)\,dx\Big)\,dy$$

Megoldás: A belső integrál kiszámításakor x a változó, y konstans számként kezelendő:

$$\int_0^1 (x+y+2)\,dx = \Big[\frac{x^2}{2}+yx+2x\Big]_0^1 = \Big(\frac{1^2}{2}+y\cdot 1+2\cdot 1\Big)-\Big(\frac{0^2}{2}+y\cdot 0+2\cdot 0\Big) = \frac{5}{2}+y.$$

Most a külső integrál kiszámítása következik, melynél y a változó:

$$\int_{-1}^{2}\Big(\int_{0}^{1}(x+y+2)\,dx\Big)\,dy = \int_{-1}^{2}\Big(\frac{5}{2}+y\Big)\,dy = \Big[\frac{5}{2}y+\frac{y^2}{2}\Big]_{-1}^{2} = \Big(\frac{5}{2}\cdot 2+\frac{2^2}{2}\Big)-\Big(\frac{5}{2}(-1)+\frac{(-1)^2}{2}\Big) =$$

$$(5+2)-\Big(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\Big) = 9.$$

2. Számolja ki az alábbi kettős integrált!

$$\int_{-1}^{1}\Big(\int_{0}^{2}(x^2-3y-1)\,dx\Big)\,dy$$

Megoldás: A belső integrál kiszámításakor x a változó, y konstans számként kezelendő:

$$\int_0^2 (x^2-3y-1)\,dx = \Big[\frac{x^3}{3}-3yx-x\Big]_0^2 = \Big(\frac{2^3}{3}-3y\cdot 2-2\Big)-\Big(\frac{0^3}{3}-3y\cdot 0-0\Big) = \frac{2}{3}-6y.$$

Most a külső integrál kiszámítása következik, melynél y a változó:

$$\int_{-1}^{1}\Big(\int_{0}^{2}(x^2-3y-1)\,dx\Big)\,dy = \int_{-1}^{1}\Big(\frac{2}{3}-6y\Big)\,dy = \Big[\frac{2}{3}y-6\cdot\frac{y^2}{2}\Big]_{-1}^{1} = \Big[\frac{2}{3}y-3y^2\Big]_{-1}^{1} =$$

$$\Big(\frac{2}{3}\cdot 1-3\cdot 1^2\Big)-\Big(\frac{2}{3}\cdot(-1)-3\cdot(-1)^2\Big) = -\frac{7}{3}-\Big(-\frac{2}{3}-3\Big) = -\frac{7}{3}+\frac{11}{3} = \frac{4}{3}.$$

3. Számolja ki az alábbi kettős integrált!

$$\int_{-1}^{3}\Big(\int_{1}^{2} xy(x-y)\,dy\Big)\,dx$$

Megoldás: A belső integrál kiszámításakor y a változó, x konstans számként kezelendő. Az integrálás előtt célszerű elvégezni a kijelölt szorzást:

$$\int_1^2 xy(x-y)\,dy = \int_1^2 (x^2y-xy^2)\,dy = \Big[x^2\cdot\frac{y^2}{2}-x\cdot\frac{y^3}{3}\Big]_1^2 =$$

$$\Big(x^2\cdot\frac{2^2}{2}-x\cdot\frac{2^3}{3}\Big)-\Big(x^2\cdot\frac{1^2}{2}-x\cdot\frac{1^3}{3}\Big) = \frac{3}{2}x^2-\frac{7}{3}x.$$

Most a külső integrál kiszámítása következik, melynél x a változó:

$$\int_{-1}^{3}\Big(\int_{1}^{2} xy(x-y)\,dy\Big)\,dx = \int_{-1}^{3}\Big(\frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{3}x\Big)\,dx = \Big[\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{7}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{3} = \Big[\frac{x^3}{2} - \frac{7x^2}{6}\Big]_{-1}^{3} =$$

$$\Big(\frac{3^3}{2} - \frac{7\cdot 3^2}{6}\Big) - \Big(\frac{(-1)^3}{2} - \frac{7\cdot(-1)^2}{6}\Big) = \frac{81}{6} - \frac{63}{6} + \frac{3}{6} + \frac{7}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}.$$

4. Számolja ki az alábbi kettős integrált!

$$\int_{2}^{5}\Big(\int_{1}^{3} x^2y(xy^2-2)\,dy\Big)\,dx$$

Megoldás: A belső integrál kiszámításakor y a változó, x konstans számként kezelendő. Az integrálás előtt célszerű elvégezni a kijelölt szorzást:

$$\int_{1}^{3} x^2y(xy^2-2)\,dy = \int_{1}^{3}(x^3y^3 - 2x^2y)\,dy = \Big[x^3\,\frac{y^4}{4} - 2x^2\,\frac{y^2}{2}\Big]_{1}^{3} =$$

$$\Big(x^3\,\frac{3^4}{4} - 2x^2\,\frac{3^2}{2}\Big) - \Big(x^3\,\frac{1^4}{4} - 2x^2\,\frac{1^2}{2}\Big) = 20x^3 - 8x^2.$$

Most a külső integrál kiszámítása következik, melynél x a változó:

$$\int_{2}^{5}\Big(\int_{1}^{3} x^2y(xy^2-2)\,dy\Big)\,dx = \int_{2}^{5}\Big(20x^3 - 8x^2\Big)\,dx = \Big[20\cdot\frac{x^4}{4} - 8\cdot\frac{x^3}{3}\Big]_{2}^{5} = \Big[5x^4 - \frac{8x^3}{3}\Big]_{2}^{5} =$$

$$\Big(5\cdot 5^4 - \frac{8\cdot 5^3}{3}\Big) - \Big(5\cdot 2^4 - \frac{8\cdot 2^3}{3}\Big) = 2733.$$

5. Számolja ki az alábbi kettős integrált!

$$\int_{-1}^{2}\Big(\int_{-2}^{1}(2x+y)^2\,dy\Big)\,dx$$

Megoldás: A belső integrál kiszámításakor y a változó, x konstans számként kezelendő. Az integrálás előtt célszerű elvégezni a kijelölt négyzetreemelést:

$$\int_{-2}^{1}(2x+y)^2\,dy = \int_{-2}^{1}(4x^2+4xy+y^2)\,dy = \Big[4x^2y + 4x\,\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\Big]_{-2}^{1} =$$

$$\Big(4x^2\cdot 1 + 4x\,\frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3}\Big) - \Big(4x^2\cdot(-2) + 4x\,\frac{(-2)^2}{2} + \frac{(-2)^3}{3}\Big) = 12x^2 - 6x + 3.$$

Most a külső integrál kiszámítása következik, melynél x a változó:

$$\int_{-1}^{2}\Big(\int_{-2}^{1}(2x+y)^2\,dy\Big)\,dx = \int_{-1}^{2}\Big(12x^2 - 6x + 3\Big)\,dx = \Big[12\cdot\frac{x^3}{3} - 6\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\Big]_{-1}^{2} = \Big[4x^3 - 3x^2 + 3x\Big]_{-1}^{2} =$$

$$\Big(4\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2\Big) - \Big(4\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1)\Big) = 36.$$

6. Számolja ki az $f(x,y) = xy^2$ függvény kettős integrálját az

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq 1; \, -3 \leq y \leq 2\}$$

tartományon!

Megoldás: A következő kettős integrált kell kiszámítani:

$$\int_0^1 \Big(\int_{-3}^2 xy^2 \, dy \Big) \, dx.$$

Először a belső integrált számítjuk ki, melynek során y a változó, x pedig konstans.

$$\int_{-3}^2 xy^2 \, dy = \Big[x \, \frac{y^3}{3} \Big]_{-3}^2 = \Big(x \, \frac{2^3}{3} \Big) - \Big(x \, \frac{(-3)^3}{3} \Big) = \frac{35}{3} x.$$

A külső integrál kiszámítása:

$$\int_0^1 \Big(\int_{-3}^2 xy^2 \, dy \Big) \, dx = \int_0^1 \frac{35}{3} x \, dx = \Big[\frac{35}{3} \, \frac{x^2}{2} \Big]_0^1 = \Big[\frac{35x^2}{6} \Big]_0^1 =$$

$$\Big(\frac{35 \cdot 1^2}{6} \Big) - \Big(\frac{35 \cdot 0^2}{6} \Big) = \frac{35}{6}.$$

7. Számolja ki az $f(x,y) = x^3 y$ függvény kettős integrálját az

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; -1 \leq x \leq 3; \, 1 \leq y \leq 2\}$$

tartományon!

Megoldás: A következő kettős integrált kell kiszámítani:

$$\int_{-1}^3 \Big(\int_1^2 x^3 y \, dy \Big) \, dx.$$

Ez az integrál szorzatra bontható:

$$\int_{-1}^3 \Big(\int_1^2 x^3 y \, dy \Big) \, dx = \int_{-1}^3 x^3 \, dx \cdot \int_1^2 y \, dy.$$

Az első integrál:

$$\int_{-1}^3 x^3 \, dx = \Big[\frac{x^4}{4} \Big]_{-1}^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{80}{4} = 20.$$

A második integrál:

$$\int_1^2 y \, dy = \Big[\frac{y^2}{2} \Big]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Így az eredeti integrál:

$$\int_{-1}^3 \Big(\int_1^2 x^3 y \, dy \Big) \, dx = \int_{-1}^3 x^3 \, dx \cdot \int_1^2 y \, dy = 20 \cdot \frac{3}{2} = 30.$$

8. Számolja ki az $f(x,y) = 2x - 3y$ függvény kettős integrálját az

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, -2 \leq x \leq 0; \, -1 \leq y \leq 3\}$$

tartományon!

Megoldás: A következő kettős integrált kell kiszámítani:

$$\int_{-2}^{0} \Big(\int_{-1}^{3} (2x - 3y) \, dy \Big) \, dx.$$

Ez az integrál így alakítható:

$$\int_{-2}^{0} \Big(\int_{-1}^{3} 2x - 3y \, dy \Big) \, dx = \int_{-2}^{0} \int_{-1}^{3} 2x \, dy \, dx - \int_{-2}^{0} \int_{-1}^{3} 3y \, dy \, dx.$$

Ezeket az integrálokat pedig szorzattá alakíthatjuk:

$$\int_{-2}^{0} \int_{-1}^{3} 2x \, dy \, dx - \int_{-2}^{0} \int_{-1}^{3} 3y \, dy \, dx = \int_{-2}^{0} 2x \, dx \cdot \int_{-1}^{3} 1 \, dy - \int_{-2}^{0} 1 \, dx \cdot \int_{-1}^{3} 3y \, dy.$$

A kiszámítás így különösen egyszerű:

$$\int_{-2}^{0} 2x \, dx \cdot \int_{-1}^{3} 1 \, dy - \int_{-2}^{0} 1 \, dx \cdot \int_{-1}^{3} 3y \, dy = \Big[x^2 \Big]_{-2}^{0} \cdot \Big[y \Big]_{-1}^{3} - \Big[x \Big]_{-2}^{0} \cdot \Big[3 \cdot \frac{y^2}{2} \Big]_{-1}^{3} =$$

$$\Big[0^2 - (-2)^2 \Big] \cdot \Big[3 - (-1) \Big] - \Big[0 - (-2) \Big] \cdot \Big[3 \cdot \frac{3^2}{2} - 3 \cdot \frac{(-1)^2}{2} \Big] = -40.$$

Így az eredeti integrál:

$$\int_{-2}^{0} \Big(\int_{-1}^{3} (2x - 3y) \, dy \Big) \, dx = -40.$$

9. Számolja ki az $f(x,y) = 5x - 2y^2$ függvény kettős integrálját az

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, -1 \leq x \leq 2; \, -2 \leq y \leq 3\}$$

tartományon!

Megoldás: A következő kettős integrált kell kiszámítani:

$$\int_{-1}^{2} \Big(\int_{-2}^{3} (5x - 2y^2) \, dy \Big) \, dx.$$

Ez az integrál így alakítható:

$$\int_{-1}^{2} \Big(\int_{-2}^{3} (5x - 2y^2) \, dy \Big) \, dx = \int_{-1}^{2} \int_{-2}^{3} 5x \, dy \, dx - \int_{-1}^{2} \int_{-2}^{3} 2y^2 \, dy \, dx.$$

Ezeket az integrálokat pedig szorzattá alakíthatjuk:

$$\int_{-1}^{2} \int_{-2}^{3} 5x \, dy \, dx - \int_{-1}^{2} \int_{-2}^{3} 2y^2 \, dx \, dy = \int_{-1}^{2} 5x \, dx \cdot \int_{-2}^{3} 1 \, dy - \int_{-1}^{2} 1 \, dx \cdot \int_{-2}^{3} 2y^2 \, dy.$$

A kiszámítás így különösen egyszerű:

$$\int_{-1}^{2} 5x\,dx \cdot \int_{-2}^{3} 1\,dy - \int_{-1}^{2} 1\,dx \cdot \int_{-2}^{3} 2y^2\,dy = \Big[5 \cdot \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{2} \cdot \Big[y\Big]_{-2}^{3} - \Big[x\Big]_{-1}^{2} \cdot \Big[2 \cdot \frac{y^3}{3}\Big]_{-2}^{3} =$$

$$\Big[5 \cdot \frac{2^2}{2} - 5 \cdot \frac{(-1)^2}{2}\Big] \cdot \Big[3 - (-2)\Big] - \Big[2 - (-1)\Big] \cdot \Big[2 \cdot \frac{3^3}{3} - 2 \cdot \frac{(-2)^3}{3}\Big] = -\frac{65}{2}.$$

Így az eredeti integrál:

$$\int_{-1}^{2}\Big(\int_{-2}^{3}(5x - 2y^2)\,dy\Big)\,dx = -\frac{65}{2}.$$

10. Számolja ki az $f(x,y) = x - 3y + 5$ függvény kettős integrálját az

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -2 \le x \le 0;\ 1 \le y \le 2\}$$

tartományon!

Megoldás: A következő kettős integrált kell kiszámítani:

$$\int_{-2}^{0}\Big(\int_{1}^{2}(x - 3y + 5)\,dy\Big)\,dx.$$

Ez az integrál így alakítható:

$$\int_{-2}^{0}\Big(\int_{1}^{2}(x - 3y + 5)\,dy\Big)\,dx = \int_{-2}^{0}\int_{1}^{2} x\,dy\,dx - \int_{-2}^{0}\int_{1}^{2} 3y\,dy\,dx + \int_{-2}^{0}\int_{1}^{2} 5\,dy\,dx.$$

Ezeket az integrálokat külön számítjuk ki:

$$I_1 = \int_{-2}^{0}\int_{1}^{2} x\,dy\,dx = \int_{-2}^{0} x\,dx \cdot \int_{1}^{2} 1\,dy = \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_{-2}^{0} \cdot \Big[y\Big]_{1}^{2} = \Big(\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\Big) \cdot \Big(2 - 1\Big) = -2.$$

$$I_2 = \int_{-2}^{0}\int_{1}^{2} 3y\,dy\,dx = \int_{-2}^{0} 1\,dx \cdot \int_{1}^{2} 3y\,dy = \Big[x\Big]_{-2}^{0} \cdot \Big[3 \cdot \frac{y^2}{2}\Big]_{1}^{2} = \Big(0 - (-2)\Big) \cdot \Big(3 \cdot \frac{2^2}{2} - 3 \cdot \frac{1^2}{2}\Big) = 9.$$

$$I_3 = \int_{-2}^{0}\int_{1}^{2} 5\,dy\,dx = \int_{-2}^{0} 1\,dx \cdot \int_{1}^{2} 5\,dy = \Big[x\Big]_{-2}^{0} \cdot \Big[5y\Big]_{1}^{2} = \Big(0 - (-2)\Big) \cdot \Big(10 - 5\Big) = 10.$$

Így az eredeti integrál:

$$\int_{-2}^{0}\Big(\int_{1}^{2}(x - 3y + 5)\,dy\Big)\,dx = I_1 - I_2 + I_3 = -1.$$

11. Számolja ki az $f(x,y) = xy(x^2y^2 - 1)$ függvény kettős integrálját az

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x \le 3;\ 0 \le y \le 2\}$$

tartományon!

Megoldás: A következő kettős integrált kell kiszámítani:

$$\int_{1}^{3}\Big(\int_{0}^{2} xy(x^2y^2 - 1)\,dy\Big)\,dx.$$

Ez az integrál így írható:

$$\int_1^3 \Big(\int_0^2 xy(x^2y^2-1)\,dy\Big)\,dx = \int_1^3 \int_0^2 x^3y^3\,dy\,dx - \int_1^3 \int_0^2 xy\,dy\,dx.$$

Ezek az integrálok szorzattá alakíthatók, külön számítjuk ki őket:

$$I_1 = \int_1^3 \int_0^2 x^3y^3\,dy\,dx = \int_1^3 x^3\,dx \cdot \int_0^2 y^3\,dy = \Big[\frac{x^4}{4}\Big]_1^3 \cdot \Big[\frac{y^4}{4}\Big]_0^2 = \Big(\frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4}\Big) \cdot \Big(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\Big) = 80.$$

$$I_2 = \int_1^3 \int_0^2 xy\,dy\,dx = \int_1^3 x\,dx \cdot \int_0^2 y\,dy = \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_1^3 \cdot \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^2 = \Big(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\Big) \cdot \Big(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\Big) = 8.$$

Így az eredeti integrál:

$$\int_1^3 \Big(\int_0^2 xy(x^2y^2-1)\,dy\Big)\,dx = I_1 - I_2 = 72.$$

12. Számolja ki az $f(x,y) = e^{2x-y}$ függvény kettős integrálját az

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le \ln 3;\ 0 \le y \le \ln 4\}$$

tartományon!

Megoldás: A következő kettős integrált kell kiszámítani:

$$\int_0^{\ln 3} \Big(\int_0^{\ln 4} e^{2x-y}\,dy\Big)\,dx.$$

Ez az integrál így írható:

$$\int_0^{\ln 3} \Big(\int_0^{\ln 4} e^{2x-y}\,dy\Big)\,dx = \int_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx \cdot \int_0^{\ln 4} e^{-y}\,dy =$$

$$\Big[\frac{e^{2x}}{2}\Big]_0^{\ln 3} \cdot \Big[-e^{-y}\Big]_0^{\ln 4} = \Big(\frac{e^{2\ln 3}}{2} - \frac{e^{2\cdot 0}}{2}\Big) \cdot \Big(-e^{-\ln 4} - (-e^{-0})\Big) = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3.$$

Így az eredeti integrál:

$$\int_0^{\ln 3} \Big(\int_0^{\ln 4} e^{2x-y}\,dy\Big)\,dx = 3.$$

13. Számolja ki az $f(x,y) = e^{2y-3x}$ függvény kettős integrálját az

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le \ln 2;\ 0 \le y \le \ln 3\}$$

tartományon!

Megoldás: A következő kettős integrált kell kiszámítani:

$$\int_0^{\ln 2} \Big(\int_0^{\ln 3} e^{2y-3x}\,dy\Big)\,dx.$$

Ez az integrál így írható:

$$\int_0^{\ln 2} \Big(\int_0^{\ln 3} e^{2y-3x}\,dy\Big)\,dx = \int_0^{\ln 2} e^{-3x}\,dx \cdot \int_0^{\ln 3} e^{2y}\,dy =$$

$$\left[\frac{-e^{-3x}}{3}\right]_0^{\ln 2} \cdot \left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^{\ln 3} = \Big(-\frac{e^{-3\ln 2}}{3} - \Big(-\frac{e^{-3\cdot 0}}{3}\Big)\Big) \cdot \Big(\frac{e^{2\ln 3}}{2} - \frac{e^{2\cdot 0}}{2}\Big) = \frac{7}{24} \cdot \frac{8}{2} = \frac{7}{6}.$$

Így az eredeti integrál:

$$\int_0^{\ln 2} \Big(\int_0^{\ln 3} e^{2y-3x}\, dy\Big)\, dx = \frac{7}{6}.$$

14. Határozza meg az $f(x,y) = (4x-y)^5$ függvény kettős integrálját az

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \le x \le 1;\ 1 \le y \le 2\}$$

tartományon!

Megoldás: A következő kettős integrált kell kiszámítani:

$$\int_{-1}^{1} \Big(\int_1^2 (4x-y)^5\, dy\Big)\, dx.$$

Először a belső integrált számítjuk ki:

$$\int_1^2 (4x-y)^5\, dy = \Big[-\frac{(4x-y)^6}{6}\Big]_1^2 = -\frac{(4x-2)^6}{6} - \Big(-\frac{(4x-1)^6}{6}\Big) = \frac{(4x-1)^6 - (4x-2)^6}{6}.$$

Így az eredeti integrál:

$$\int_{-1}^{1} \Big(\int_1^2 (4x-y)^5\, dy\Big)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{(4x-1)^6 - (4x-2)^6}{6}\, dx = \Big[\frac{1}{4} \cdot \frac{(4x-1)^7 - (4x-2)^7}{7 \cdot 6}\Big]_{-1}^{1} =$$

$$\frac{(4\cdot 1-1)^7 - (4\cdot 1-2)^7}{4\cdot 7\cdot 6} - \frac{(4\cdot(-1)-1)^7 - (4\cdot(-1)-2)^7}{4\cdot 7\cdot 6} =$$

$$\frac{3^7 - 2^7 + (-6)^7 - (-5)^7}{168} = -1189.$$

15. Határozza meg az $f(x,y) = (2x+4y)^3$ függvény kettős integrálját az

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x \le 2;\ -1 \le y \le 3\}$$

tartományon!

Megoldás: A következő kettős integrált kell kiszámítani:

$$\int_1^2 \Big(\int_{-1}^{3} (2x+4y)^3\, dy\Big)\, dx.$$

Először a belső integrált számítjuk ki:

$$\int_{-1}^{3} (2x+4y)^3\, dy = \Big[\frac{1}{4} \cdot \frac{(2x+4y)^4}{4}\Big]_{-1}^{3} = \frac{(2x+4\cdot 3)^4}{16} - \frac{(2x+4\cdot(-1))^4}{16} = \frac{(2x+12)^4 - (2x-4)^4}{16}.$$

Így az eredeti integrál:

$$\int_1^2 \Big(\int_{-1}^{3} (2x+4y)^3\, dy\Big)\, dx = \int_1^2 \frac{(2x+12)^4 - (2x-4)^4}{16}\, dx = \Big[\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+12)^5 - (2x-4)^5}{5 \cdot 16}\Big]_1^2 =$$

$$\frac{(2\cdot 2+12)^5 - (2\cdot 2-4)^5}{2\cdot 5\cdot 16} - \frac{(2\cdot 1+12)^5 - (2\cdot 1-4)^5}{2\cdot 5\cdot 16} = \frac{16^5 - 14^5 + (-2)^5}{160} = 3192.$$

16. Határozza meg az $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^4}$ függvény kettős integrálját az

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 3 \le x \le 7; \, -2 \le y \le -1\}$$

tartományon!

Megoldás: A következő kettős integrált kell kiszámítani:

$$\int_3^7 \Big(\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+y)^4} \, dy \Big) \, dx = \int_3^7 \Big(\int_{-2}^{-1} (x+y)^{-4} \, dy \Big) \, dx.$$

Először a belső integrált számítjuk ki:

$$\int_{-2}^{-1} (x+y)^{-4} \, dy = \Big[-\frac{1}{3}(x+y)^{-3} \Big]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{3}(x-1)^{-3} - \Big(-\frac{1}{3}(x-2)^{-3} \Big) = \frac{1}{3}(x-2)^{-3} - \frac{1}{3}(x-1)^{-3}.$$

Így az eredeti integrál:

$$\int_3^7 \Big(\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+y)^4} \, dy \Big) \, dx = \int_3^7 \Big(\frac{1}{3}(x-2)^{-3} - \frac{1}{3}(x-1)^{-3} \Big) \, dx =$$

$$\Big[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(x-2)^{-2} - \Big(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(x-1)^{-2} \Big) \Big]_3^7 =$$

$$\Big(-\frac{1}{6} \cdot (7-2)^{-2} + \frac{1}{6} \cdot (7-1)^{-2} \Big) - \Big(-\frac{1}{6} \cdot (3-2)^{-2} + \frac{1}{6} \cdot (3-1)^{-2} \Big) = \frac{83}{675}.$$

17. Számolja ki az $f(x,y) = x \cos(xy)$ függvény kettős integrálját az

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \le x \le \frac{1}{2}; \, 0 \le y \le \pi\}$$

tartományon!

Megoldás: A következő kettős integrált kell kiszámítani:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^{\pi} x \cos(xy) \, dy \Big) \, dx.$$

Először a belső integrált számítjuk ki:

$$\int_0^{\pi} x \cos(xy) \, dy = \Big[x \cdot \frac{\sin(xy)}{x} \Big]_0^{\pi} = \Big[\sin(xy) \Big]_0^{\pi} = \sin(x\pi) - \sin(x \cdot 0) = \sin(\pi x).$$

Így az eredeti integrál:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^{\pi} x \cos(xy) \, dy \Big) \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x) \, dx = \Big[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \Big]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$-\frac{\cos(\pi \cdot \frac{1}{2})}{\pi} + \frac{\cos(\pi \cdot 0)}{\pi} = \frac{\cos 0 - \cos \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

18. Számolja ki az $f(x,y) = y\sin(xy)$ függvény kettős integrálját az

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le \frac{1}{2};\ 0 \le y \le \pi\}$$

tartományon!

Megoldás: A következő kettős integrált kell kiszámítani:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\pi} y\sin(xy))\, dy \right) dx.$$

Ha először a belső integrált számítanánk ki, akkor egy kellemetlen szorzatfüggvényt kellene integrálni, ugyanis az y és a $\sin(xy)$ is függ az integrálás y változójától. Ez a nehézség nem lép fel, ha megcseréljük az integrálások sorrendjét:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\pi} y\sin(xy))\, dy \right) dx = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} y\sin(xy))\, dx \right) dy.$$

Itt először a belső integrált számítjuk ki:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} y\sin(xy))\, dx = \left[y \cdot \frac{-\cos(xy)}{y} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[-\cos(xy) \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\cos\frac{y}{2} + \cos 0 = 1 - \cos\frac{y}{2}.$$

Így az eredeti integrál:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\pi} y\sin(xy))\, dy \right) dx = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} y\sin(xy))\, dx \right) dy = \int_0^{\pi} \left(1 - \cos\frac{y}{2} \right) dy =$$

$$\left[y - 2\sin\frac{y}{2} \right]_0^{\pi} = \left(\pi - 2\sin\frac{\pi}{2} \right) - \left(0 - 2\sin\frac{0}{2} \right) = \pi - 2 \approx 1.14159$$