MATEMATIKA I.
Sorozatok

1. Írja fel az $a_n = \frac{1-5n}{n+4}$ sorozat 10. és $(n+1)$-edik elemét!

   Megoldás: A 10. elem a_{10}, tehát az a_n sorozatot definiáló képletben n helyére 10-et helyettesítünk:
$$a_{10} = \frac{1-5\cdot 10}{10+4} = \frac{1-50}{14} = -\frac{49}{14}.$$
   Hasonlóan, az $(n+1)$-edik elem a_{n+1} (ami nem tévesztendő össze a_n+1-el!), tehát az a_n sorozatot definiáló képletben n helyére $n+1$-et helyettesítünk:
$$a_{n+1} = \frac{1-5\cdot(n+1)}{(n+1)+4} = \frac{1-5n-5}{n+5} = \frac{-5n-4}{n+5} = -\frac{5n+4}{n+5}.$$

2. Írja fel az $a_n = \frac{3n+4}{5n-1}$ sorozat $(n+1)$-edik és $(n-2)$-edik tagját!

   Megoldás: Az $(n+1)$-edik tag a_{n+1}, tehát az a_n sorozatot definiáló képletben n helyére $n+1$-et helyettesítünk:
$$a_{n+1} = \frac{3\cdot(n+1)+4}{5\cdot(n+1)-1} = \frac{3n+3+4}{5n+5-1} = \frac{3n+7}{5n+4}.$$
   Hasonlóan, az $(n-2)$-edik tag a_{n-2}, tehát az a_n sorozatot definiáló képletben n helyére $n-2$-t helyettesítünk:
$$a_{n-2} = \frac{3\cdot(n-2)+4}{5\cdot(n-2)-1} = \frac{3n-6+4}{5n-10-1} = \frac{3n-2}{5n-11}.$$

3. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás szempontjából!

   (a) $a_n = \frac{n+1}{n+3}$

   Megoldás: Az a_n sorozat pontosan akkor növekvő, illetve csökkenő, ha $a_{n+1} \geq a_n$, vagyis $a_{n+1} a_n \geq 0$, illetve $a_{n+1} \leq a_n$, vagyis $a_{n+1} - a_n \leq 0$. A szigorú monotonitáshoz pedig természetesen a megfelelő szigorú egyenlőtlenségnek kell teljesülni. Másszóval, a monotonitáshoz az $a_{n+1} - a_n$ előjelét kell megvizsgálni.

   Esetünkben:
$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)+1}{(n+1)+3} - \frac{n+1}{n+3} = \frac{n+2}{n+4} - \frac{n+1}{n+3} = \frac{(n+2)(n+3)-(n+1)(n+4)}{(n+4)(n+3)} =$$
$$\frac{6-4}{(n+4)(n+3)} = \frac{2}{(n+4)(n+3)} > 0$$
   minden n esetén, hiszen n az $1, 2, \ldots$ értékeket veszi fel. Ezért $a_{n+1} > a_n$ teljesül minden n-re, így a_n szigorúan monoton növekvő sorozat.

   (b) $a_n = \frac{n+3}{1+n}$

   Megoldás: Vegyük észre, hogy ennek a sorozatnak a tagjai pontosan megegyeznek az előző feladatban szerepelt sorozat tagjainak reciprokaival. Tehát a reciprokok sorozata szigorúan növekvő: $\frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_{n+1}}$, az előző feladat szerint. Mivel ezek pozitív számok, így az egyenlőtlenség mindkét oldalának reciprokát véve az egyenlőtlenség iránya megfordul: $a_n > a_{n+1}$. Tehát ez a sorozat szigorúan monoton csökkenő. Természetesen ezt a feladatot is megoldhatjuk az előző mintájára, megvizsgálva az $a_{n+1} - a_n$ kifejezés előjelét.

(c) $a_n = \frac{n+7}{2n-1}$

Megoldás: A fentiek mintájára

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)+7}{2(n+1)-1} - \frac{n+7}{2n-1} = \frac{n+8}{2n+1} - \frac{n+7}{2n-1} = \frac{(n+8)(2n-1)-(n+7)(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} =$$

$$\frac{-8-7}{(2n+1)(2n-1)} = -\frac{15}{(2n+1)(2n-1)} < 0$$

minden n esetén, hiszen n az $1, 2, \ldots$ értékeket veszi fel. Ezért $a_{n+1} < a_n$ teljesül minden n-re, így a_n szigorúan monoton csökkenő sorozat.

(d) $a_n = \frac{2+4n}{3-5n}$

Megoldás: A fentiek mintájára

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2+4(n+1)}{3-5(n+1)} - \frac{2+4n}{3-5n} = \frac{4n+6}{-5n-2} - \frac{2+4n}{3-5n} = \frac{(4n+6)(3-5n)-(2+4n)(-5n-2)}{(-5n-2)(3-5n)} =$$

$$\frac{18+4}{(-5n-2)(3-5n)} = \frac{22}{(5n+2)(5n-3)} > 0$$

minden n esetén. Ezért $a_{n+1} > a_n$ teljesül minden n-re, így a_n szigorúan monoton növekvő sorozat.

(e) $a_n = \frac{3n-2}{1-2n}$

Megoldás: A fentiek mintájára

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)-2}{1-2(n+1)} - \frac{3n-2}{1-2n} = \frac{3n+1}{-2n-1} - \frac{3n-2}{1-2n} = \frac{(3n+1)(1-2n)-(3n-2)(-2n-1)}{(-2n-1)(1-2n)} =$$

$$\frac{1-2}{(-2n-1)(1-2n)} = -\frac{1}{(2n+1)(2n-1)} < 0$$

minden n esetén. Ezért $a_{n+1} < a_n$ teljesül minden n-re, így a_n szigorúan monoton csökkenő sorozat.

(f) $a_n = \frac{1+2n}{2-3n}$

Megoldás: A fentiek mintájára

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1+2(n+1)}{2-3(n+1)} - \frac{1+2n}{2-3n} = \frac{2n+3}{-1-3n} - \frac{1+2n}{2-3n} = \frac{(2n+3)(2-3n)-(1+2n)(-1-3n)}{(-1-3n)(2-3n)} =$$

$$\frac{6+1}{(-1-3n)(2-3n)} = \frac{7}{(1+3n)(3n-2)} > 0$$

minden n esetén. Ezért $a_{n+1} > a_n$ teljesül minden n-re, így a_n szigorúan monoton növekvő sorozat.

(g) $a_n = -3 \cdot 4^n$

Megoldás: A fentiek mintájára

$$a_{n+1} - a_n = -3 \cdot 4^{n+1} - (-3 \cdot 4^n) = -3 \cdot 4^n \cdot 4 - (-3 \cdot 4^n) = -3 \cdot 4^n(4-1) = -9 \cdot 4^n < 0$$

minden n esetén. Ezért $a_{n+1} < a_n$ teljesül minden n-re, így a_n szigorúan monoton csökkenő sorozat.

4. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából!

(a) $a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$

Megoldás: Előrebocsátjuk, hogy egy sorozat akkor korlátos alulról, ha van olyan szám, amelynél a sorozatnak nincs kisebb tagja – az ilyen számokat a sorozat alsó korlátjainak nevezzük. Ha egy szám alsó korlát, akkor nyilván minden annál kisebb szám is alsó korlát, ezért fontos tudni, hogy minden alulról korlátos sorozatnak van legnagyobb alsó korlátja, vagyis egy olyan alsó korlátja, aminél semmilyen nagyobb szám nem alsó korlát. Tehát ha egy sorozat alulról korlátos, akkor végtelen sok alsó korlátja van, de csak egyetlen legnagyobb alsó korlátja. Nyilván minden monoton növekvő sorozat alulról korlátos, és az első tagja a legnagyobb alsó korlát. Hasonló észrevételeket tehetünk a felülről korlátos sorozatokkal kapcsolatban, értelemszerű módosításokkal. Ha egy sorozat alulról és felülről is korlátos, akkor röviden azt mondjuk, hogy korlátos. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a sorozat összes tagja benne van egy véges zárt intervallumban. A legkisebb olyan zárt intervallum, amely egy adott korlátos sorozat összes tagját tartalmazza nyilván az, amelynek baloldali végpontja a sorozat legnagyobb alsó korlátja, jobboldali végpontja pedig a sorozat legkisebb felső korlátja.

Esetünkben vegyük észre, hogy az $a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ sorozat tagjai felváltva negatívok, illetve pozitívok: a páratlan indexűek negatívok, a párosak pedig pozitívok. Tehát a sorozat se nem növekvő, se nem csökkenő. Másrészt, a páratlan indexű tagok sorozata növekvő, tehát az első tag $a_1 = -\frac{1}{4}$ a legnagyobb alsó korlát, s ez egyben az egész sorozat legnagyobb alsó korlátja, hiszen a páros indexű tagok mind pozitívak. Továbbá, a páros indexű tagok sorozata csökkenő, így azok első tagja, $a_2 = \frac{1}{16}$ a legkisebb felső korlát, s ez egyben az egész sorozat legkisebb felső korlátja, hiszen a páratlan indexű tagok mind negatívak. Összefoglalva, a sorozat nem monoton, korlátos, és legnagyobb alsó korlátja $-\frac{1}{4}$, legkisebb felső korlátja pedig $\frac{1}{16}$.

(b) $a_n = (-4)^n$

Megoldás: A sorozat tagjai ismét felváltva negatívok, illetve pozitívok: a páratlan indexűek negatívok, a párosak pedig pozitívok. Tehát a sorozat se nem növekvő, se nem csökkenő. Másrészt, a páratlan indexű tagok sorozata csökkenő, de alulról nyilván nem korlátos. Hasonlóan, a páros indexű tagok sorozata növekvő, de felülről nem korlátos. Ezért a sorozat se nem monoton, se nem korlátos, se alulról, se felülről.

(c) $a_n = 3^n$

Megoldás: Mivel

$$a_{n+1} - a_n = 3^{n+1} - 3^n = 3^n(3-1) = 2 \cdot 3^n > 0,$$

ezért a sorozat szigorúan monoton növekvő, tehát az első tagja $a_1 = 3$ a legnagyobb alsó korlátja. Felülről viszont nyilván nem korlátos, hiszen a 3 pozitív egész kitevőjű hatványai bármilyen számnál nagyobbak lesznek. Tehát a sorozat alulról korlátos, felülről nem, így nem korlátos.

(d) $a_n = -n^4$

Megoldás: Mivel

$$a_{n+1} - a_n = -(n+1)^4 - (-n^4) = n^4 - (n+1)^4 < 0$$

ezért a sorozat szigorúan monoton csökkenő, tehát az első tagja $a_1 = -1$ a legkisebb felső korlátja. Alulról viszont nyilván nem korlátos. Tehát a sorozat felülről korlátos, alulról nem, vagyis nem korlátos.

5. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat konvergencia szempontjából!

(a) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

Megoldás: Nullához konvergáló sorozat és korlátos sorozat szorzata konvergens, és nullához konvergál. Mivel

$$a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

ezt alkalmazhatjuk. Ugyanis az $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ sorozat nullához konvergál (ld. nevezetes sorozatok), a $(-1)^n$ sorozat pedig korlátos, hiszen minden tagja -1 vagy 1. Így a szorzatuk nullához konvergál:

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0.$$

(b) $a_n = (-4)^n$

Megoldás: Minden véges határértékkel rendelkező konvergens sorozat korlátos, s mivel ez a sorozat nem korlátos (ld. fent), így nem lehet véges határértéke. Mivel minden második tagja negatív, így nem konvergálhat $+\infty$-hez, s mivel minden második tagja pozitív, így $-\infty$-hez sem. Konvergencia esetén más lehetőség nincs, így a sorozat divergens, és tágabb értelemben sincs határértéke.

(c) $a_n = 3^n$

Megoldás: Mivel ez a sorozat se korlátos, ezért ez sem konvergálhat véges határértékhez (ld. az előző feladatot), és persze $-\infty$-hez sem, hiszen alulról korlátos, pl. a 0 alsó korlátja. Viszont nyilván monoton növekvő, és minden monoton sorozatnak van határértéke. Mégpedig, ha növekvő, akkor korlátos esetben konvergens, és a legkisebb felső korlátjához tart, nem korlátos esetben pedig divergens, de tágabb értelemben $+\infty$ a határértéke. Ha pedig csökkenő, akkor korlátos esetben konvergens, és a legnagyobb alsó korlátjához tart, nem korlátos esetben pedig divergens, de tágabb értelemben $-\infty$ a határértéke. Esetünkben tehát a a sorozat divergens, de tágabb értelemben: $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = +\infty$.

(d) $a_n = -n^4$

Megoldás: Mivel ez a sorozat se korlátos, ezért ez sem konvergálhat véges határértékhez (ld. az előző feladatokat), és persze $+\infty$-hez sem, hiszen minden tagja negatív. Az előző feladatban alkalmazott érveléshez hasonlóan azt kapjuk, hogy a sorozat divergens, de tágabb értelemben: $\lim\limits_{n\to\infty} -n^4 = -\infty$.

6. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat konvergencia szempontjából! Ha a sorozat konvergens, adja meg azt az N_0 küszöbszámot, amelytől kezdve a sorozat elemei a határérték $\varepsilon = 10^{-2}$ sugarú környezetébe esnek!

a) $a_n = \frac{2-3n}{1-4n}$

Megoldás: A sorozat tagjait a következőképpen érdemes felírni:

$$a_n = \frac{2-3n}{1-4n} = \frac{3n-2}{4n-1} = \frac{n}{n} \cdot \frac{3-\frac{2}{n}}{4-\frac{1}{n}} = \frac{3-\frac{2}{n}}{4-\frac{1}{n}}.$$

Alkalmazhatjuk a határértékkel kapcsolatos alapismereteket: az $\frac{1}{n}$ sorozat nullához konvergál, így a $\frac{2}{n} = 2 \cdot \frac{1}{n}$ sorozat is. Ezért a fenti tört nevezőjének, $4 - \frac{1}{n}$-nek a határértéke $4 - 0 = 4$, ami nem nulla, tehát a tört a számláló és nevező határértékeinek hányadosához konvergál. A számláló $3 - \frac{2}{n}$, határértéke $3 - 0 = 3$, így végül

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-3n}{1-4n} = \frac{3}{4}.$$

A keresett N_0 küszöbszámnak azt kell teljesítenie, hogy ha $n > N_0$, akkor

$$\left|a_n - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{2-3n}{1-4n} - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon.$$

Némi számolgatás vár ránk:

$$\varepsilon > \left|\frac{2-3n}{1-4n} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{4(2-3n)-3(1-4n)}{4(1-4n)}\right| = \left|\frac{8-3}{4(1-4n)}\right| = \frac{5}{16n-4}.$$

Az utolsó lépésben azt használtuk, hogy $|4-16n| = 16n-4$, mert nyilván $16n-4 > 0$. Ebből az adódik, hogy

$$16n - 4 < \frac{5}{\varepsilon}, \text{ azaz } 16n > 4 + \frac{5}{\varepsilon},$$

tehát az eredeti, kívánt egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $n > \frac{1}{16}\left(4 + \frac{5}{\varepsilon}\right)$. Az $\varepsilon = 10^{-2}$-t behelyettesítve

$$n > \frac{1}{16}(4 + 5 \cdot 10^2) = \frac{504}{16} = 31,5$$

kell, hogy teljesüljön, így $N_0 = 31$ jó választás. Természetesen ennél bármilyen nagyobb egész szám is megfelel a célnak, ez az N_0 a lehető legkisebb.

b) $a_n = \frac{6n^2+3}{2+9n}$

Megoldás: A sorozat tagjait a következőképpen érdemes felírni:

$$a_n = \frac{6n^2+3}{2+9n} = \frac{n^2}{n} \cdot \frac{6+\frac{3}{n^2}}{\frac{2}{n}+9} = n \cdot \frac{6+\frac{3}{n^2}}{\frac{2}{n}+9}.$$

A tört határértékét vizsgálva láthatjuk, hogy a számláló határértéke 6, a nevezőé pedig 9, így a tört $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$-hez konvergál, a határértékre vonatkozó műveleti szabályok alapján. Mivel az első tényezőnek, az n sorozatnak a tágabb értelemben vett határértéke $+\infty$, ezért ugyancsak a műveleti szabályok alapján a formális $+\infty \cdot \frac{3}{2} = +\infty$ „számítást” végezhetjük el, tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+3}{2+9n} = +\infty.$$

A sorozat tehát divergens, de tágabb értelemben vett határértéke $+\infty$.

c) $a_n = \frac{8-10n}{5n+2}$

Megoldás: Először a határértéket számítjuk ki, amennyiben létezik. A fentiekhez hasonlóan átalakítjuk az a_n-t megadó kifejezést úgy, hogy a számlálóban és a nevezőben egyaránt kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát:

$$a_n = \frac{8-10n}{5n+2} = \frac{n}{n} \cdot \frac{\frac{8}{n} - 10}{5 + \frac{2}{n}} = \frac{\frac{8}{n} - 10}{5 + \frac{2}{n}} \longrightarrow -\frac{10}{5} = -2,$$

a nevezetes sorozatok határértékei és a műveleti szabályok alapján.

A keresett N_0 küszöbszámnak azt kell teljesítenie, hogy ha $n > N_0$, akkor

$$\Big| a_n - (-2) \Big| = \Big| \frac{8-10n}{5n+2} + 2 \Big| < \varepsilon.$$

Most a következő, a fentiekhez hasonló átalakítást végezzük el:

$$\varepsilon > \Big| \frac{8-10n}{5n+2} + 2 \Big| = \Big| \frac{8-10n+2(5n+2)}{5n+2} \Big| = \Big| \frac{8+4}{5n+2} \Big| = \frac{12}{5n+2}.$$

Az abszolútérték-jelet elhagyhatjuk, hiszen a $\frac{12}{5n+2}$ kifejezés nyilván pozitív. Ebből az adódik, hogy

$$5n+2 < \frac{12}{\varepsilon}, \text{ azaz } 5n > \frac{12}{\varepsilon} - 2,$$

tehát az eredeti, kívánt egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $n > \frac{1}{5}\big(\frac{12}{\varepsilon} - 2\big)$. Az $\varepsilon = 10^{-2}$-t behelyettesítve

$$n > \frac{1}{5}(12 \cdot 10^2 - 2) = \frac{1198}{5} = 239,6$$

kell, hogy teljesüljön, így $N_0 = 239$ jó választás.

d) $a_n = \frac{2n-3}{4n+1}$

Megoldás: Az eddigi tapasztalatok alapján ilyenkor célszerű a számlálóban és a nevezőben egyaránt kiemelni n legmagasabb előforduló hatványát:

$$a_n = \frac{2n-3}{4n+1} = \frac{n}{n} \cdot \frac{2 - \frac{3}{n}}{4 + \frac{1}{n}} = \frac{2 - \frac{3}{n}}{4 + \frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

a nevezetes sorozatok határértékei és a műveleti szabályok alapján.

A keresett N_0 küszöbszámnak tehát azt kell teljesítenie, hogy ha $n > N_0$, akkor

$$\Big| a_n - \frac{1}{2} \Big| = \Big| \frac{2n-3}{4n+1} - \frac{1}{2} \Big| < \varepsilon.$$

A fentiekhez hasonló számítást végezzük el:

$$\varepsilon > \Big| \frac{2n-3}{4n+1} - \frac{1}{2} \Big| = \Big| \frac{2(2n-3)-(4n+1)}{2(4n+1)} \Big| = \Big| \frac{-6-1}{8n+2} \Big| = \frac{7}{8n+2}.$$

Ebből az adódik, hogy

$$8n+2 < \frac{7}{\varepsilon}, \text{ azaz } 8n > \frac{7}{\varepsilon} - 2,$$

tehát a kívánt egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $n > \frac{1}{8}\big(\frac{7}{\varepsilon} - 2\big)$. Az $\varepsilon = 10^{-2}$-t behelyettesítve

$$n > \frac{1}{8}(7 \cdot 10^2 - 2) = \frac{698}{8} = 87,25$$

kell, hogy teljesüljön, így $N_0 = 87$ jó választás.

e) $a_n = \frac{-4n^3+8}{5+7n^2}$

Megoldás: Itt is kiemeljük a számlálóból, és a nevezőből az n legmagasabb előforduló hatványát:

$$a_n = \frac{-4n^3+8}{5+7n^2} = \frac{n^3}{n^2} \cdot \frac{-4+\frac{8}{n^3}}{\frac{5}{n^2}+7} = n \cdot \frac{-4+\frac{8}{n^3}}{\frac{5}{n^2}+7}.$$

A fentiek mintájára láthatjuk, hogy a tört határértéke $-\frac{4}{7}$, így mivel az első tényezőnek, az n sorozatnak a tágabb értelemben vett határértéke $+\infty$, ezért ugyancsak a műveleti szabályok alapján a formális $+\infty \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) = -\infty$ „számítást” végezhetjük el, tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-4n^3+8}{5+7n^2} = -\infty.$$

A sorozat tehát divergens, de tágabb értelemben vett határértéke $-\infty$.

7. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából! Ha a sorozat konvergens, adja meg azt az N_0 küszöbszámot, amelytől kezdve a sorozat elemei a határérték $\varepsilon = 10^{-3}$ sugarú környezetébe esnek!

a) $a_n = \frac{5-7n}{4-5n}$

Megoldás: A sorozat monotonitásának vizsgálata:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5-7(n+1)}{4-5(n+1)} - \frac{5-7n}{4-5n} = \frac{-2-7n}{-1-5n} - \frac{5-7n}{4-5n} = \frac{7n+2}{5n+1} - \frac{7n-5}{5n-4} =$$

$$\frac{(7n+2)(5n-4)-(7n-5)(5n+1)}{(5n+1)(5n-4)} = -\frac{3}{(5n+1)(5n-4)} < 0,$$

tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő. Ebből adódóan felülről korlátos, legkisebb felső korlátja az első elem: $a_1 = \frac{5-7}{4-5} = 2$. Az alulról korlátosság és a konvergencia vizsgálatához írjuk a_n-t más alakba: a fentiekhez hasonlóan

$$a_n = \frac{5-7n}{4-5n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{\frac{5}{n}-7}{\frac{4}{n}-5} = \frac{\frac{5}{n}-7}{\frac{4}{n}-5} \longrightarrow \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5},$$

tehát $\lim_{n\to\infty} \frac{5-7n}{4-5n} = \frac{7}{5}$, s mivel a_n csökkenő, így határértéke megegyezik legnagyobb alsó korlátjával. Tehát a_n szigorúan csökkenő, korlátos, konvergens, továbbá határértéke és legnagyobb alsó korlátja $\frac{7}{5}$, legkisebb felső korlátja 2.

Az adott ε-hoz tartozó N_0 küszöbindexet a fentiekben alkalmazott módszerrel határozzuk meg: ha $n > N_0$, akkor annak kell teljesülni, hogy

$$\varepsilon > \left|a_n - \frac{7}{5}\right| = \left|\frac{5-7n}{4-5n} - \frac{7}{5}\right| = \left|\frac{5(5-7n)-7(4-5n)}{5(4-5n)}\right| =$$

$$\left|\frac{-3}{5(4-5n)}\right| = \frac{3}{5(5n-4)}.$$

Itt felhasználtuk, hogy $|4-5n| = 5n-4$, mert $4-5n$ nyilván negatív, ha $n = 1, 2, \ldots$. Az utolsó egyenlőtlenségben ε-nal osztunk, $5n-4$-el pedig szorzunk, ekkor

$$5n - 4 > \frac{3}{5\varepsilon}, \text{ azaz } 5n > \frac{3}{5\varepsilon} + 4,$$

tehát $n > \frac{1}{5}\Big(\frac{3}{5\varepsilon}+4\Big)$ kell, hogy teljesüljön. Az $\varepsilon = 10^{-3}$ helyettesítéssel

$$n > 120,8$$

ez azt jelenti, hogy választhatjuk az

$$N_0 = 120$$

küszöbindexet, vagy bármely ennél nagyobb egész számot.

b) $a_n = \frac{2n-2}{1+3n}$

Megoldás: A sorozat monotonitásának vizsgálata:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-2}{1+3(n+1)} - \frac{2n-2}{1+3n} = \frac{2n}{3n+4} - \frac{2n-2}{1+3n} =$$

$$\frac{2n(3n+1)-(2n-2)(3n+4)}{(3n+4)(3n+1)} = \frac{8}{(3n+4)(3n+1)} > 0,$$

tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő. Ebből adódóan alulról korlátos, legnagyobb alsó korlátja az első elem: $a_1 = \frac{2-2}{1+3} = 0$. A felülről korlátosság és a konvergencia vizsgálatához írjuk a_n-t más alakba: a fentiekhez hasonlóan

$$a_n = \frac{2n-2}{1+3n} = \frac{n}{n}\cdot\frac{2-\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}+3} = \frac{2-\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}+3} \longrightarrow \frac{2}{3},$$

tehát $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-2}{1+3n} = \frac{2}{3}$, s mivel a_n növekvő, így határértéke megegyezik legkisebb felső korlátjával. Tehát a_n szigorúan növekvő, korlátos, konvergens, továbbá határértéke és legkisebb felső korlátja $\frac{2}{3}$, legnagyobb alsó korlátja 0.

Az adott ε-hoz tartozó N_0 küszöbindexet a fentiekben alkalmazott módszerrel határozzuk meg: ha $n > N_0$, akkor annak kell teljesülni, hogy

$$\varepsilon > \Big|a_n - \frac{2}{3}\Big| = \Big|\frac{2n-2}{1+3n} - \frac{2}{3}\Big| = \Big|\frac{3(2n-2)-2(1+3n)}{3(1+3n)}\Big| =$$

$$\Big|\frac{-8}{3(1+3n)}\Big| = \frac{8}{3+9n}.$$

Ebben az egyenlőtlenségben ε-nal osztunk, $3+9n$-el pedig szorzunk, ekkor

$$3+9n > \frac{8}{\varepsilon}, \text{ azaz } 9n > \frac{8}{\varepsilon} - 3,$$

tehát $n > \frac{1}{9}\Big(\frac{8}{\varepsilon}-3\Big)$ kell, hogy teljesüljön. Az $\varepsilon = 10^{-3}$ helyettesítéssel

$$n > 888,1$$

s ez azt jelenti, hogy választhatjuk az

$$N_0 = 888$$

küszöbindexet, vagy bármely ennél nagyobb egész számot.

Megjegyzés: Az eddigi feladatok megoldásából azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a fentiekhez hasonló kifejezések, az úgynevezett *racionális törtfüggvények* (ami az n két polinomjának hányadosát jelenti) esetében a határértéket „ránézésre” megállapíthatjuk, a következők alapján:

A) Ha a **számlálóban** az n legmagasabb hatványa **kisebb**, mint a **nevezőben**, akkor a sorozat határértéke 0.
B) Ha a **számlálóban** az n legmagasabb hatványa **nagyobb**, mint a **nevezőben**, akkor a sorozat határértéke $+\infty$, vagy $-\infty$ attól függően, hogy számlálóban és a nevezőben az n legmagasabb hatványait tartalmazó tagok előjele azonos, vagy ellentétes.
C) Ha a **számlálóban** az n legmagasabb hatványa **egyenlő** a **nevezőben** az n legmagasabb hatványával, akkor a sorozat határértéke egyenlő a számlálóban és a nevezőben az n legmagasabb hatványait tartalmazó tagok hányadosával.

c) $a_n = 2^{n+1}$

Megoldás: A sorozat monotonitásának vizsgálata:

$$a_{n+1} - a_n = 2^{(n+1)+1} - 2^{n+1} = 2^{n+1}(2-1) = 2^{n+1} > 0$$

tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő. Ebből adódóan alulról korlátos, legnagyobb alsó korlátja az első elem: $a_1 = 2^{1+1} = 2^2 = 4$. A sorozat felülről nyilván nem korlátos: ha K tetszőleges pozitív valós szám, akkor $n > \log_2 \frac{1}{2}K$ esetén $2^n > \frac{1}{2}K$, és $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > K$, tehát a sorozatnak semmilyen pozitív valós szám nem felső korlátja. Ezért a_n nem is lehet konvergens, viszont az előző számításból látható, hogy tágabb értelemben $+\infty$ a határértéke. Tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő, alulról korlátos, legnagyobb alsó korlátja 4, nem korlátos, divergens, és tágabb értelemben $+\infty$ a határértéke.

8. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $a_n = -5n^2 + 4n - 8$

Megoldás: Szimbolikusan ugyan, de a határértékre vonatkozó tételek és műveleti szabályok alapján korrekt módon azt írhatjuk, hogy

$$a_n = -5n^2 + 4n - 8 = -n^2\left(5 + \frac{4}{n} - \frac{8}{n^2}\right) \longrightarrow (-\infty) \cdot (5+0+0) = -\infty.$$

Egészen pontosan ez azt jelenti, hogy a zárójelben álló sorozat három sorozat összege, melyek közül az első a konstans 5 sorozat, melynek határértéke 5, a második és harmadik pedig a nullához konvergáló $\frac{4}{n}$ és $-\frac{8}{n^2}$ sorozatok, így a zárójelben álló sorozatnak ezek határértékeinek összege, vagyis $5+0+0 = 5$ a határértéke. Mivel ez a sorozat a $-\infty$ tágabb értelemben vett határértékkel rendelkező $-n^2$ sorozattal van megszorozva, így a műveleti szabályok alapján a szorzat tágabb értelemben vett határértéke $-\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} -5n^2 + 4n - 8 = -\infty.$$

(b) $a_n = 3n^4 + \sqrt{7}n^5 - \frac{4}{3}n^2$

Megoldás: Az előbbi feladathoz hasonlóan, a kifejezésből kiemeljük az n legmagasabb kitevőjű hatványát:

$$a_n = 3n^4 + \sqrt{7}n^5 - \frac{4}{3}n^2 = n^5 \cdot \left(\frac{3}{n} + \sqrt{7} - \frac{4}{3}\frac{1}{n^3}\right).$$

Az előbb alkalmazott érvelés alapján a zárójelben levő kifejezés határértéke $\sqrt{7}$, ami meg van szorozva a $+\infty$ tágabb értelemben vett határértékkel rendelkező n^5 sorozattal, így a műveleti szabályok alapján a szorzat tágabb értelemben vett határértéke $+\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} 3n^4 + \sqrt{7}n^5 - \frac{4}{3}n^2 = +\infty.$$

Megjegyzés: Az eddigi feladatok megoldásából azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a fentiekhez hasonló kifejezések, az úgynevezett *polinomok* esetében a határértéket ,,ránézésre" megállapíthatjuk, hogy sorozat határértéke $+\infty$, vagy $-\infty$ attól függően, hogy a legmagasabb hatvány együtthatója pozitív, vagy negatív.

(c) $a_n = \sqrt{5n^4 - 2n^2 + 1}$

Megoldás: Az előbbi feladathoz hasonlóan, a kifejezésből kiemeljük az n legmagasabb kitevőjű hatványát:

$$a_n = \sqrt{n^4\Big(5 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\Big)} = \sqrt{n^4} \cdot \sqrt{5 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = n^2 \cdot \sqrt{5 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}.$$

Az előbb alkalmazott érvelés alapján a négyzetgyök alatt levő kifejezés határértéke 5, így a szorzat második tényezőjének határértéke $\sqrt{5}$, ami meg van szorozva a $+\infty$ tágabb értelemben vett határértékkel rendelkező n^2 sorozattal, így a műveleti szabályok alapján a szorzat tágabb értelemben vett határértéke $+\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{5n^4 - 2n^2 + 1} = +\infty.$$

(d) $a_n = \sqrt[5]{3 - n - n^2}$

Megoldás: Az előbbi feladathoz hasonlóan, a kifejezésből kiemeljük az n legmagasabb kitevőjű hatványát:

$$a_n = \sqrt[5]{3 - n - n^2} = \sqrt[5]{n^2} \cdot \sqrt[5]{\frac{3}{n^2} - \frac{1}{n} - 1} = n^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[5]{\frac{3}{n^2} - \frac{1}{n} - 1}.$$

A korábban alkalmazott érvelés alapján a gyök alatt levő kifejezés határértéke -1, így a szorzat második tényezőjének határértéke $\sqrt[5]{-1} = -1$, ami meg van szorozva a $+\infty$ tágabb értelemben vett határértékkel rendelkező $n^{\frac{2}{5}}$ sorozattal, így a műveleti szabályok alapján a szorzat tágabb értelemben vett határértéke $-\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{3 - n - n^2} = -\infty.$$

(e) $a_n = \frac{7n^3 - 4n^2}{6 - 5n^3 - 9n}$

Megoldás: A fenti megjegyzés alapján a határérték ,,ránézésre" $-\frac{7}{5}$, hiszen a harmadik esettel állunk szemben: a számláló és a nevező határértéke megegyezik, tehát a határérték a legmagasabb fokú tagok hányadosa: $\frac{7n^3}{-5n^3} = -\frac{7}{5}$. A pontos számítások elvégzése: a fentiekhez hasonlóan, a számlálóból és a nevezőből kiemeljük az n legmagasabb kitevőjű hatványát:

$$a_n = \frac{7n^3 - 4n^2}{6 - 5n^3 - 9n} = \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{7 - \frac{1}{n}}{\frac{6}{n} - 5 - \frac{9}{n^2}} = \frac{7 - \frac{1}{n}}{\frac{6}{n} - 5 - \frac{9}{n^2}}.$$

A korábban alkalmazott érvelés alapján látható, hogy a tört határértéke $\frac{7}{-5} = -\frac{7}{5}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^3 - 4n^2}{6 - 5n^3 - 9n} = -\frac{7}{5}.$$

(f) $a_n = \frac{6n-2n^5-7}{3n^2+8n}$

Megoldás: A fenti megjegyzés alapján a határérték ,,ránézésre" $-\infty$, hiszen a második esettel állunk szemben: a számláló magasabb fokú tagot tartalmaz, mint a nevező, és a legmagasabb fokú tagok $-2n^5$, és $3n^2$, melyek előjele ellentétes. A pontos számítások elvégzése: a fentiekhez hasonlóan, a számlálóból és a nevezőből kiemeljük az n legmagasabb kitevőjű hatványát:

$$a_n = \frac{6n-2n^5-7}{3n^2+8n} = \frac{n^5}{n^2} \cdot \frac{\frac{6}{n^4} - 2 - \frac{7}{n^5}}{3 + \frac{8}{n}} = n^3 \cdot \frac{\frac{6}{n^4} - 2 - \frac{7}{n^5}}{3 + \frac{8}{n}}.$$

A korábban alkalmazott érvelés alapján látható, hogy a tört határértéke $\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$, mely meg van szorozva a $+\infty$ tágabb értelemben vett határértékkel rendelkező n^3 sorozattal, így a műveleti szabályok alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n-2n^5-7}{3n^2+8n} = -\infty.$$

(g) $a_n = \frac{2n^6+3-4n}{2+8n^2}$

Megoldás: A ,,ránézésre-módszer" itt is működik, melynek alapján a határérték $+\infty$, de álljon itt a pontos számítás: a fentiekhez hasonlóan, a számlálóból és a nevezőből kiemeljük az n legmagasabb kitevőjű hatványát:

$$a_n = \frac{2n^6+3-4n}{2+8n^2} = \frac{n^6}{n^2} \cdot \frac{2 + \frac{3}{n^6} - \frac{4}{n^5}}{\frac{2}{n^2} + 8} = n^4 \cdot \frac{2 + \frac{3}{n^6} - \frac{4}{n^5}}{\frac{2}{n^2} + 8}.$$

A korábban alkalmazott érvelés alapján látható, hogy a tört határértéke $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, mely meg van szorozva a $+\infty$ tágabb értelemben vett határértékkel rendelkező n^4 sorozattal, így a műveleti szabályok alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^6+3-4n}{2+8n^2} = +\infty.$$

(h) $a_n = \frac{4n+3-9n^4}{-2+5n^7}$

Megoldás: ,,Ránézésre" a határérték 0, hiszen a számláló alacsonyabb fokú a nevezőnél. A pontos számítás: a fentiekhez hasonlóan, a számlálóból és a nevezőből kiemeljük az n legmagasabb kitevőjű hatványát:

$$a_n = \frac{4n+3-9n^4}{-2+5n^7} = \frac{n^4}{n^7} \cdot \frac{\frac{4}{n^3} + \frac{3}{n^4} - 9}{\frac{-2}{n^7} + 5} = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{\frac{4}{n^3} + \frac{3}{n^4} - 9}{-\frac{2}{n^7} + 5}.$$

A korábban alkalmazott érvelés alapján látható, hogy a tört határértéke $\frac{-9}{5} = -\frac{9}{5}$, mely meg van szorozva a 0 határértékkel rendelkező $\frac{1}{n^3}$ sorozattal, így a műveleti szabályok alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+3-9n^4}{-2+5n^7} = 0 \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) = 0.$$

(i) $a_n = \frac{(5n-4)^2+2n}{3n-2n^2}$

Megoldás: A ,,ránézésre-módszer" alkalmazásához vegyük észre, hogy a számlálóban a kijelölt négyzetreemelés elvégzése után a legmagasabb fokú tag $25n^2$ lesz, s ebből már adódik, hogy a határérték $-\frac{25}{2}$. A pontos számításhoz először a számlálóban elvégezzük a kijelölt négyzetreemelést, majd a fentiekhez hasonlóan, a számlálóból és a nevezőből kiemeljük az n legmagasabb kitevőjű hatványát:

$$a_n = \frac{(5n-4)^2+2n}{3n-2n^2} = \frac{25n^2-40n+16+2n}{3n-2n^2} = \frac{25n^2-38n+16}{3n-2n^2} =$$
$$\frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{25-\frac{38}{n}+\frac{16}{n^2}}{\frac{3}{n}-2} = \frac{25-\frac{38}{n}+\frac{16}{n^2}}{\frac{3}{n}-2}.$$

A korábban alkalmazott érvelés alapján látható, hogy a tört határértéke $\frac{25}{-2} = -\frac{25}{2}$, így a műveleti szabályok alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(5n-4)^2+2n}{3n-2n^2} = -\frac{25}{2}.$$

(j) $a_n = \frac{(-3-2n)^2-4n}{1-7n}$

Megoldás: Az előző feladathoz hasonlóan, a ,,ránézésre-módszerhez" csak a legmagasabb fokú tagokat kell meghatározni: a számlálóban ez $(-2n)^2 = 4n^2$ lesz, a nevezőben pedig -7, így a határérték $-\infty$. A pontos számítás: először a számlálóban elvégezzük a kielölt négyzetreemelést, majd a fentiekhez hasonlóan, a számlálóból és a nevezőből kiemeljük az n legmagasabb kitevőjű hatványát:

$$a_n = \frac{(-3-2n)^2-4n}{1-7n} = \frac{9+12n+4n^2-4n}{1-7n} = \frac{9+8n+4n^2}{1-7n} =$$
$$\frac{n^2}{n} \cdot \frac{\frac{9}{n^2}+\frac{8}{n}+4}{\frac{1}{n}-7} = n \cdot \frac{\frac{9}{n^2}+\frac{8}{n}+4}{\frac{1}{n}-7}.$$

A korábban alkalmazott érvelés alapján látható, hogy a tört határértéke $\frac{4}{-7} = -\frac{4}{7}$, mely meg van szorozva a $+\infty$ tágabb értelemben vett határértékkel rendelkező n sorozattal, így a műveleti szabályok alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-3-2n)^2-4n}{1-7n} = -\infty.$$

(k) $a_n = \frac{(3-6n^2)^2+2n^3}{2+4n^5+3n^2}$

Megoldás: A ,,ránézésre-módszer" alkalmazásához kicsit több figyelem kell: a számlálóban a legmagasabb fokú tag – a négyzetreemelés után – $(6n^2)^2 = 36n^4$, a nevezőben pedig $4n^5$, így a határérték 0. Ám végezzük el a pontos számítást is: először a számlálóban elvégezzük a kielölt négyzetreemelést, majd a fentiekhez hasonlóan, a számlálóból és a nevezőből kiemeljük az n legmagasabb kitevőjű hatványát:

$$a_n = \frac{(3-6n^2)^2+2n^3}{2+4n^5+3n^2} = \frac{9-36n^2+36n^4+2n^3}{2+4n^5+3n^2} =$$
$$\frac{n^4}{n^5} \cdot \frac{\frac{9}{n^4}-\frac{36}{n^2}+36+\frac{2}{n}}{\frac{2}{n^5}+4+\frac{3}{n^3}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{9}{n^4}-\frac{36}{n^2}+36+\frac{2}{n}}{\frac{2}{n^5}+4+\frac{3}{n^3}}.$$

A korábban alkalmazott érvelés alapján látható, hogy a tört határértéke $\frac{36}{4} = 9$, mely meg van szorozva a 0 határértékkel rendelkező $\frac{1}{n}$ sorozattal, így a műveleti szabályok alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3-6n^2)^2+2n^3}{2+4n^5+3n^2} = 0.$$

(l) $a_n = \frac{(n^2+1)(2n+3)}{n(3n-1)^2}$

Megoldás: „Ránézésre" meghatározzuk a legmagasabb fokú tagokat: a számlálóban – a szorzások elvégzése után – a két legmagasabb fokú tag szorzata: $n^2 \cdot 2n = 2n^3$, a nevezőben pedig négyzetreemelés és szorzás után $n \cdot (3n)^2 = n \cdot 9n^2 = 9n^3$. Így a határérték $\frac{2n^3}{9n^3} = \frac{2}{9}$. A részletes számítás ezt igazolja: először a számlálóban elvégezzük a kielölt szorzást, a nevezőben pedig a kijelölt négyzetreemelést, majd a fentiekhez hasonlóan, a számlálóból és a nevezőből kiemeljük az n legmagasabb kitevőjű hatványát:

$$a_n = \frac{(n^2+1)(2n+3)}{n(3n-1)^2} = \frac{2n^3+3n^2+2n+3}{n(9n^2-6n+1)} = \frac{2n^3+3n^2+2n+3}{9n^3-6n^2+n}$$

$$\frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{9-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{9-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

A korábban alkalmazott érvelés alapján látható, hogy a tört határértéke $\frac{2}{9}$, így a műveleti szabályok alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)(2n+3)}{n(3n-1)^2} = \frac{2}{9}.$$

(m) $a_n = \frac{(3n^2-1)(n^3+1)}{5n^3(n+4)^2}$

Megoldás: A „ránézésre-módszerünk" alapján a határérték $\frac{3}{5}$ lesz, melyet a következő, szokásos számítás igazol: először a számlálóban és a nevezőben elvégezzük a kijelölt műveleteket, majd a fentiekhez hasonlóan, a számlálóból és a nevezőből kiemeljük az n legmagasabb kitevőjű hatványát:

$$a_n = \frac{(3n^2-1)(n^3+1)}{5n^3(n+4)^2} = \frac{3n^5+3n^2-n^3-1}{5n^3(n^2+8n+16)} = \frac{3n^5+3n^2-n^3-1}{5n^5+40n^4+80n^3}$$

$$\frac{n^5}{n^5} \cdot \frac{3+\frac{3}{n^3}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^5}}{5+\frac{40}{n}+\frac{80}{n^2}} = \frac{3+\frac{3}{n^3}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^5}}{5+\frac{40}{n}+\frac{80}{n^2}}.$$

A korábban alkalmazott érvelés alapján látható, hogy a tört határértéke $\frac{3}{5}$, így a műveleti szabályok alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2-1)(n^3+1)}{5n^3(n+4)^2} = \frac{3}{5}.$$

9. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $a_n = \frac{\sqrt{2n^2+7}}{6+n}$

Megoldás: A fentiekben alkalmazott módszert követjük: a számlálóban és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát. Ne feledjük, hogy a gyökök alatti hatványoknál a kiemelést a gyök alól is el kell végezni. Esetünkben a számlálóból a gyök alól n^2-et kiemelve a gyökön kívülre már $\sqrt{n^2} = n$ kerül:

$$a_n = \frac{\sqrt{2n^2+7}}{6+n} = \frac{\sqrt{n^2(2+\frac{7}{n^2})}}{\frac{6}{n}+1} = \frac{\sqrt{n^2}}{n} \cdot \frac{\sqrt{2+\frac{7}{n^2}}}{\frac{6}{n}+1} = \frac{n}{n} \cdot \frac{\sqrt{2+\frac{7}{n^2}}}{\frac{6}{n}+1} = \frac{\sqrt{2+\frac{7}{n^2}}}{\frac{6}{n}+1}.$$

Itt már alkalmazhatjuk a korábbi gondolatmenetet: a gyök alatti kifejezés határértéke $2+0=2$, így a számláló határértéke $\sqrt{2}$, a nevezőé pedig $0+1=1$. Így végül

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^2+7}}{6+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{7}{n^2}}}{\frac{6}{n}+1} = \sqrt{2}.$$

(b) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+2}}{6n-3}$

Megoldás: A fentiekben alkalmazott módszert követjük: a számlálóban és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát:

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+2}}{6n-3} = \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n} \cdot \frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}}}{6-\frac{3}{n}} = \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n} \cdot \frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}}}{6-\frac{3}{n}} = n^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}}}{6-\frac{3}{n}}.$$

Az $n^{-\frac{1}{3}}$ tényező 0-hoz tart, a tört pedig $\frac{\sqrt[3]{1}}{6} = \frac{1}{6}$-hoz, így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2}}{6n-3} = 0 \cdot \frac{1}{6} = 0.$$

Megállapíthatjuk, hogy a korábban vázolt „ránézésre-módszer” kiterjeszthető a gyökös kifejezésekre úgy, hogy azoknak is „fokszámot” tulajdonítunk: a gyök alatti legmagasabb fokszámot elosztjuk a gyökkitevővel. A jelen példánál ez úgy nyilvánul meg, hogy a gyök alatti kifejezés fokszáma 2, elosztva a gyökkitevővel, azaz 3-mal, azt kapjuk, hogy a számláló „fokszáma” $\frac{2}{3}$, a nevezőjé pedig 1, így a számláló fokszáma kisebb a nevezőnél, s ezért a tört határértéke 0.

(c) $a_n = \frac{n^2+2}{\sqrt[4]{n^5-6}}$

Megoldás: A „ránézésre-módszer” alapján a határérték ∞ valamilyen előjellel, hiszen a számláló fokszáma 2, a nevezőjé pedig $\frac{5}{4}$, ami kisebb, mint 2. Az előjel a legmagasabb fokú tagok előjeleinek összehasonlításából adódik. A pontosság és a gyakorlás kedvéért a fentiekben alkalmazott módszerrel számoljuk ki a határéréket: a számlálóban is, és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát:

$$a_n = \frac{n^2+2}{\sqrt[4]{n^5-6}} = \frac{n^2}{n^{\frac{5}{4}}} \cdot \frac{1+\frac{2}{n^2}}{\sqrt[4]{1-\frac{6}{n^5}}} = n^{2-\frac{5}{4}} \cdot \frac{1+\frac{2}{n^2}}{\sqrt[4]{1-\frac{6}{n^5}}} = n^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1+\frac{2}{n^2}}{\sqrt[4]{1-\frac{6}{n^5}}}.$$

Az $n^{\frac{3}{4}}$ tényező $+\infty$-hez tart, a második tényező pedig $\frac{1}{\sqrt[4]{1}} = \frac{1}{1}$-hez, így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{\sqrt[4]{n^5-6}} = +\infty.$$

(d) $a_n = \frac{-\sqrt{5n^2+4+2n}-8n}{n+3}$

Megoldás: A „ránézésre-módszer” alapján a határérték véges, hiszen a számláló és a nevező fokszáma egyaránt 1. A pontosság és a gyakorlás kedvéért a határértéket a fentiekben alkalmazott módszerrel számoljuk ki: a számlálóban is, és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát:

$$a_n = \frac{-\sqrt{5n^2+4+2n}-8n}{n+3} = \frac{n}{n} \cdot \frac{-\sqrt{5+\frac{4}{n^2}+\frac{2}{n}}-8}{1+\frac{3}{n}} = \frac{-\sqrt{5+\frac{4}{n^2}+\frac{2}{n}}-8}{1+\frac{3}{n}}.$$

A számláló $-\sqrt{5}-8$-hoz tart, a nevező pedig 1-hez, így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\sqrt{5n^2+4+2n}-8n}{n+3} = -\sqrt{5}-8.$$

(e) $a_n = \frac{3n+\sqrt{6n^2+2n-8}}{5n-1}$

Megoldás: A „ránézésre-módszer" alapján a határérték véges, hiszen a számláló és a nevező fokszáma egyaránt 1. A pontosság és a gyakorlás kedvéért a határértéket a fentiekben alkalmazott módszerrel számoljuk ki: a számlálóban is, és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát:

$$a_n = \frac{3n+\sqrt{6n^2+2n-8}}{5n-1} = \frac{n}{n} \cdot \frac{3+\sqrt{6+\frac{2}{n}-\frac{8}{n^2}}}{5-\frac{1}{n}} = \frac{3+\sqrt{6+\frac{2}{n}-\frac{8}{n^2}}}{5-\frac{1}{n}}.$$

A számláló $3+\sqrt{6}$-hoz tart, a nevező pedig 5-höz, így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+\sqrt{6n^2+2n-8}}{5n-1} = \frac{3+\sqrt{6}}{5}.$$

(f) $a_n = \frac{11n^3-2n}{\sqrt[3]{6n+2n^3-1}+7n}$

Megoldás: A „ránézésre-módszer" alapján a határérték valamilyen előjelű ∞, hiszen a számláló fokszáma n^3, ami nagyobb, mint a nevező fokszáma: 1. A pontosság és a gyakorlás kedvéért a határértéket a fentiekben alkalmazott módszerrel számoljuk ki: a számlálóban és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát:

$$a_n = \frac{11n^3-2n}{\sqrt[3]{6n+2n^3-1}+7n} = \frac{n^3}{n} \cdot \frac{11-\frac{2}{n^2}}{\sqrt[3]{\frac{6}{n^2}+2-\frac{1}{n^3}}+7} = n^2 \cdot \frac{11-\frac{2}{n^2}}{\sqrt[3]{\frac{6}{n^2}+2-\frac{1}{n^3}}+7}.$$

A számláló 11-hez tart, a nevező pedig $\sqrt[3]{2}+7$-hez, így a tört $\frac{11}{\sqrt[3]{2}+7}$-hez konvergál, de a tört meg van szorozva a $+\infty$-hez tartó n^2-tel, így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{11n^3-2n}{\sqrt[3]{6n+2n^3-1}+7n} = +\infty.$$

(g) $a_n = \frac{2+n}{n^2+\sqrt[4]{6n+3n^4-1}}$

Megoldás: A „ránézésre-módszer" alapján a határérték 0, hiszen a számláló fokszáma 1, ami kisebb, mint a nevező fokszáma: 2. A pontosság és a gyakorlás kedvéért a határértéket a fentiekben alkalmazott módszerrel számoljuk ki: a számlálóban is, és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát:

$$a_n = \frac{2+n}{n^2+\sqrt[4]{6n+3n^4-1}} = \frac{n}{n^2} \cdot \frac{\frac{2}{n}+1}{1+\sqrt[4]{\frac{6}{n^7}+\frac{3}{n^4}-\frac{1}{n^8}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{2}{n}+1}{1+\sqrt[4]{\frac{6}{n^7}+\frac{3}{n^4}-\frac{1}{n^8}}}.$$

A számláló 1-hez tart, a nevező is 1-hez, így az utolsó tört 1-hez konvergál, de ez meg van szorozva a 0-hoz tartó $\frac{1}{n}$-tel, így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+n}{n^2+\sqrt[4]{6n+3n^4-1}} = 0.$$

(h) $a_n = \frac{\sqrt[4]{16n^7+6n^3-n}}{4+4n}$

Megoldás: A „ránézésre-módszer" alapján a határérték valamilyen előjelű ∞, hiszen a számláló fokszáma 1, ami nagyobb, mint a nevező fokszáma: 2. Az előjelet a legmagasabb fokú tagok előjelei döntik el, ami jelen esetben pozitív. A pontosság és a gyakorlás kedvéért a határértéket a fentiekben alkalmazott módszerrel számoljuk ki: a számlálóban is, és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát:

$$a_n = \frac{\sqrt[4]{16n^7+6n^3-n}}{4+4n} = \frac{n^{\frac{7}{4}}}{n} \cdot \frac{\sqrt[4]{16+\frac{6}{n^4}-\frac{1}{n^6}}}{\frac{4}{n}+4} = n^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\sqrt[4]{16+\frac{6}{n^4}-\frac{1}{n^6}}}{\frac{4}{n}+4}.$$

Az utolsó törtben a számláló $\sqrt[4]{16} = 2$-höz tart, a nevező 4-hez, így a tört $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$-hez konvergál, de ez még meg van szorozva a $+\infty$-hez tartó $n^{\frac{3}{4}}$-nel, így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{16n^7+6n^3-n}}{4+4n} = +\infty.$$

(i) $a_n = \frac{8n^3+\sqrt{4n^6+2n^2-8n}}{n^3-1}$

Megoldás: A „ránézésre-módszer" alapján a határérték véges, hiszen a számláló és a nevező fokszáma egyaránt 3. A pontos határértéket gyakorlásképpen a fentiekben alkalmazott módszerrel számítjuk ki: a számlálóban is, és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát:

$$a_n = \frac{8n^3+\sqrt{4n^6+2n^2-8n}}{n^3-1} = \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{8+\sqrt{4+\frac{2}{n^4}-\frac{8}{n^5}}}{1-\frac{1}{n^3}} = \frac{8+\sqrt{4+\frac{2}{n^4}-\frac{8}{n^5}}}{1-\frac{1}{n^3}}.$$

A számláló $8+\sqrt{4} = 10$-hez tart, a nevező 1-hez, így a tört $\frac{10}{1} = 1$-hez konvergál:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^3+\sqrt{4n^6+2n^2-8n}}{n^3-1} = 10.$$

(j) $a_n = \frac{2-3n^2}{\sqrt[3]{4n^5+2n}+5n}$

Megoldás: A „ránézésre-módszer" alapján a határérték ∞-hez tart valamilyen előjellel, hiszen a számláló fokszáma 2, a nevezőé pedig kisebb: $\frac{5}{3}$. Az ∞ „előjelét" a legmagasabb fokú tagok együtthatóinak összehasonlításából megállapíthatjuk, ami $\frac{-3}{\sqrt[3]{4}} < 0$, de gyakorlásképpen a fentiekben alkalmazott módszerrel számolunk: a számlálóban is, és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát:

$$a_n = \frac{2-3n^2}{\sqrt[3]{4n^5+2n}+5n} = \frac{n^2}{n^{\frac{5}{3}}} \cdot \frac{\frac{2}{n^2}-3}{\sqrt[3]{4+\frac{2}{n^4}}+\frac{5}{n^{\frac{2}{3}}}} = n^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\frac{2}{n^2}-3}{\sqrt[3]{4+\frac{2}{n^4}}+\frac{5}{n^{\frac{2}{3}}}}.$$

A számláló -3-hoz tart, a nevező $\sqrt[3]{4}$-hez, így a tört a negatív $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$-hez konvergál, de a tört meg van szorozva a $+\infty$-hez tartó $n^{\frac{1}{3}}$-nal, így

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-3n^2}{\sqrt[3]{4n^5+2n}+5n} = -\infty.$$

(k) $a_n = \frac{5-\sqrt{n^2-9}}{2n+3}$

Megoldás: A ,,ránézésre-módszer" alapján a határérték $-\frac{1}{2}$, amit a fentiekben alkalmazott módszerrel igazolunk: a számlálóban és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát:

$$a_n = \frac{5-\sqrt{n^2-9}}{2n+3} = \frac{n}{n} \cdot \frac{\frac{5}{n} - \sqrt{1-\frac{9}{n^2}}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{\frac{5}{n} - \sqrt{1-\frac{9}{n^2}}}{2+\frac{3}{n}}.$$

A számláló -1-hez tart, a nevező 2-höz, így a tört $-\frac{1}{2}$-hez konvergál:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5-\sqrt{n^2-9}}{2n+3} = -\frac{1}{2}.$$

(l) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^4+3n^2-1}}{3+5n}$

Megoldás: A ,,ránézésre-módszer" alapján a határérték $+\infty$, amit a fentiekben alkalmazott módszerrel igazolunk: a számlálóban és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát:

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^4+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^4}}}{3+5n} = \frac{n^{\frac{4}{3}}}{n} \cdot \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^4}}}{\frac{3}{n}+5} = n^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^4}}}{\frac{3}{n}+5}.$$

A számláló $\sqrt[3]{1} = 1$-hez tart, a nevező 5-höz, így a tört $\frac{1}{5}$-höz konvergál, de meg van szorozva a $+\infty$-hez tartó $n^{\frac{1}{3}}$ sorozattal, így:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+3n^2-1}}{3+5n} = +\infty.$$

(m) $a_n = \frac{n^2-1}{3n-\sqrt[3]{4n^7-2n^3}}$

Megoldás: A ,,ránézésre-módszer" alapján a határérték 0, amit a fentiekben alkalmazott módszerrel igazolunk: a számlálóban és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát:

$$a_n = \frac{n^2-1}{3n-\sqrt[3]{4n^7-2n^3}} = \frac{n^2}{n^{\frac{7}{3}}} \cdot \frac{1-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^{\frac{4}{3}}} - \sqrt[3]{4-\frac{2}{n^4}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^{\frac{4}{3}}} - \sqrt[3]{4-\frac{2}{n^4}}}.$$

Az utolsó törtben a számláló 1-hez tart, a nevező $-\sqrt[3]{4}$-hez, így a tört $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$-hez konvergál, de meg van szorozva a 0-hoz tartó $\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ sorozattal, így:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n-\sqrt[3]{4n^7-2n^3}} = 0.$$

(n) $a_n = \frac{2-\sqrt{2n^2+3n}}{\sqrt{n-2}}$

Megoldás: A ,,ránézésre-módszer" alapján a határérték valamilyen előjelű ∞, amit a fentiekben alkalmazott módszerrel igazolunk: a számlálóban és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát:

$$a_n = \frac{2-\sqrt{2n^2+3n}}{\sqrt{n-2}} = \frac{n}{n^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\frac{2}{n}-\sqrt{2+\frac{3}{n}}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}} = n^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{2}{n}-\sqrt{2+\frac{3}{n}}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}}.$$

A számláló $-\sqrt{2}$-höz tart, a nevező $\sqrt{1}=1$-hez, így a tört $-\sqrt{2}$-höz konvergál, de meg van szorozva a $+\infty$-hez tartó $n^{\frac{1}{2}}$ sorozattal, így:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-\sqrt{2n^2+3n}}{\sqrt{n-2}} = -\infty.$$

(o) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^4+5}+\sqrt{6n^2+2n-8}}{n-1}$

Megoldás: A ,,ránézésre-módszer" alapján a határérték $+\infty$, amit a fentiekben alkalmazott módszerrel igazolunk: a számlálóban és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát, de ne feledjük, hogy a számlálóban mindkét tagból ugyanazt a hatványt kell kiemelni, azt amelyik az egész számlálóban a legmagasabb kitevőjű, vagyis $n^{\frac{4}{3}}$-t:

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^4+5}+\sqrt{6n^2+2n-8}}{n-1} = \frac{n^{\frac{4}{3}}}{n} \cdot \frac{\sqrt[3]{1+\frac{5}{n^4}}+\sqrt{\frac{6}{n^{\frac{2}{3}}}+\frac{2}{n^{\frac{5}{3}}}-\frac{8}{n^{\frac{8}{3}}}}}{1-\frac{1}{n}} =$$

$$(*) \qquad n^{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{5}{n^4}}+\sqrt{\frac{6}{n^{\frac{2}{3}}}+\frac{2}{n^{\frac{5}{3}}}-\frac{8}{n^{\frac{8}{3}}}}}{1-\frac{1}{n}}.$$

A gyökkifejezésekből való kiemelés részletesebben a következő módon történik:

$$\sqrt[3]{n^4+5} = \sqrt[3]{n^4\left(1+\frac{5}{n^4}\right)} = \sqrt[3]{n^4} \cdot \sqrt[3]{1+\frac{5}{n^4}} = n^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[3]{1+\frac{5}{n^4}},$$

és a négyzetgyökös kifejezésből is $n^{\frac{4}{3}}$-ot kell kiemelni, ami négyzetgyök alatt $\sqrt{n^{\frac{8}{3}}}$, tehát

$$\sqrt{6n^2+2n-8} = \sqrt{n^{\frac{8}{3}}(6n^{2-\frac{8}{3}}+2n^{1-\frac{8}{3}}-8n^{-\frac{8}{3}})} = \sqrt{n^{\frac{8}{3}}} \cdot \sqrt{6n^{2-\frac{8}{3}}+2n^{1-\frac{8}{3}}-8n^{-\frac{8}{3}}} =$$

$$n^{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{6}{n^{\frac{2}{3}}}+\frac{2}{n^{\frac{5}{3}}}-\frac{8}{n^{\frac{8}{3}}}}.$$

A fenti, csillaggal jelölt kifejezésben, a törtben a számláló $\sqrt[3]{1}=1$-hez tart, a nevező 1-hez, így a tört 1-hez konvergál, de meg van szorozva a $+\infty$-hez tartó $n^{\frac{1}{3}}$ sorozattal, így:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+5}+\sqrt{6n^2+2n-8}}{n-1} = -\infty.$$

(p) $a_n = \frac{\sqrt{9n^4-3n^2+4}-3n}{n^2-\sqrt{5n+16n^4-2}}$

Megoldás: A ,,ránézésre-módszer” alapján a határérték $-\frac{3}{4}$, amit a fentiekben alkalmazott módszerrel igazolunk: a számlálóban és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát, de ne feledjük, hogy a számlálóban mindkét tagból ugyanazt a hatványt kell kiemelni, azt amelyik az egész számlálóban, a legmagasabb kitevőjű, vagyis n^2-et, és ugyanez a helyzet a nevezőben is:

$$a_n = \frac{\sqrt{9n^4-3n^2+4}-3n}{n^2-\sqrt{5n+16n^4-2}} = \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{\sqrt{9-\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^4}}-\frac{3}{n}}{1-\sqrt{\frac{5}{n^3}+16-\frac{2}{n^4}}} = \frac{\sqrt{9-\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^4}}-\frac{3}{n}}{1-\sqrt{\frac{5}{n^3}+16-\frac{2}{n^4}}}.$$

A törtben a számláló $\sqrt{9} = 3$-hoz tart, a nevező $1-\sqrt{16} = -3$-hoz, így a tört -1-hez konvergál:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^4-3n^2+4}-3n}{n^2-\sqrt{5n+16n^4-2}} = -1.$$

(q) $a_n = \frac{6n^2+\sqrt[3]{3n^7+6n^4}}{\sqrt[5]{3n^{10}+6n}-2n^3}$

Megoldás: A ,,ránézésre-módszer” alapján a határérték 0, hiszen a nevező fokszáma 3, ami nagyobb, mint a számláló fokszáma: $\frac{7}{3}$. Részletesen, ezt a fentiekben alkalmazott módszerrel igazolhatjuk: a számlálóban és a nevezőben is kiemeljük n legmagasabb előforduló hatványát, de ne feledjük, hogy a számlálóban mindkét tagból ugyanazt a hatványt kell kiemelni, azt amelyik az egész számlálóban, a legmagasabb kitevőjű, vagyis n^2-et, és ugyanez a helyzet a nevezőben is:

$$a_n = \frac{6n^2+\sqrt[3]{3n^7+6n^4}}{\sqrt[5]{3n^{10}+6n}-2n^3} = \frac{n^{\frac{7}{3}}}{n^3} \cdot \frac{6n^{2-\frac{7}{3}}+\sqrt[3]{3n^{7-7}+6n^{4-7}}}{\sqrt[5]{3n^{10-15}+6n^{1-15}}-2n^{3-3}} =$$

$$n^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{6n^{-\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{3+6n^{-3}}}{\sqrt[5]{3n^{-5}+6n^{-14}}-2}$$

Az n negatív kitevőjű hatványai 0-hoz tartanak, hiszen azok a megfelelő pozitív kitevőjű hatványok reciprokai, a pozitív kitevőjű hatványok pedig $+\infty$-hez tartanak. Ezért a törtben a számláló $\sqrt[3]{3}$-hoz tart, a nevező pedig -2-höz, így a tört $-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$-höz konvergál:, ami meg van szorozva a 0-hoz konvergáló $n^{-\frac{2}{3}}$ sorozattal, ezért

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+\sqrt[3]{3n^7+6n^4}}{\sqrt[5]{3n^{10}+6n}-2n^3} = 0.$$

10. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $a_n = 5^n - 3^n$

Megoldás: Az a_n sorozat két olyan sorozat különbsége, melyek mindegyike divergens, de mindegyiknek létezik a tágabb értelemben vett határértéke, ami $+\infty$. Mivel ilyen esetben a határértékre vonatkozó számolási szabályok nem adnak útmutatást az a_n határértékének kiszámítására, más módszert kell alkalmaznunk. Ugyanaz lesz az alapgondolat, mint a fentiekben: kiemeljük a kifejezésből azt a tagot, amely várhatóan a ,,legnagyobb” , a ,,leggyorsabban” tart $+\infty$-hez. Az 1-nél nagyobb alapú exponenciális függvények között azok az

„erősebbek”, amelyeknek az alapja nagyobb. Esetünkben ezért az 5^n tényezőt emeljük ki a kifejezésből:

$$a_n = 5^n\left(1 - \frac{3^n}{5^n}\right) = 5^n\left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right].$$

A szögletes zárójelben a $\left(\frac{3}{5}\right)^n$ határértéke 0, hiszen az 1-nél kisebb abszolútértékű számok hatványai 0-hoz konverálnak. Így az zárójelben álló kifejezés határértéke 1, ami meg van szorozva a $+\infty$ – tágabb értelemben vett – határértékkel rendelkező 5^n sorozattal, így a határértékre vonatkozó, ebben az esetben alkalmazható szabályok alapján a szorzat határértéke $+\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} 5^n - 3^n = +\infty.$$

(b) $a_n = 10^n - 2^{4n}$

Megoldás: A fenti gondolatmenet alkalmazásához azonos hatványkitevőkre van szükség:

$$a_n = 10^n - 2^{4n} = a_n = 10^n - (2^4)^n = 10^n - 16^n.$$

Most már alkalmazhatjuk a fenti módszert:

$$a_n = 10^n - 16^n = 16^n\left(\frac{10^n}{16^n} - 1\right) = 16^n\left[\left(\frac{10}{16}\right)^n - 1\right].$$

A szögletes zárójelben a $\left(\frac{10}{16}\right)^n = \left(\frac{5}{8}\right)^n$ határértéke 0, így a zárójeles kifejezés határértéke -1, ami a $+\infty$ hatfértékkel rendelkező 16^n sorozattal megszorozva $-\infty$-hez tart:

$$\lim_{n\to\infty} 10^n - 2^{4n} = -\infty.$$

(c) $a_n = 3^n - 5^{-n}$

Megoldás: Mivel

$$a_n = 3^n - 5^{-n} = 3^n - \left(\frac{1}{5}\right)^n = 3^n\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n\right] = 3^n\left[1 - \left(\frac{1}{15}\right)^n\right],$$

a fenti gondolatmenet alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} 3^n - 5^{-n} = +\infty.$$

(d) $a_n = \frac{3^n + 2\cdot 5^n}{4^n - 4}$

Megoldás: A fentiekhez hasonlóan járunk el – a számlálóban és a nevezőben is kiemeljük a „legnagyobb” tényezőket:

$$a_n = \frac{3^n + 2\cdot 5^n}{4^n - 4} = \frac{5^n}{4^n} \cdot \frac{\frac{3^n}{5^n} + 2}{1 - 4\cdot\frac{1}{4^n}} = \left(\frac{5}{4}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 2}{1 - 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n}.$$

Mivel itt $\left(\frac{3}{5}\right)^n$ és $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ határértéke 0, ezért a tört határértéke $\frac{2}{1} = 1$, a $+\infty$ határértékkel rendelkező $\left(\frac{5}{4}\right)^n$-el megszorozva a sorozat határértéke $+\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 2\cdot 5^n}{4^n - 4} = +\infty.$$

(e) $a_n = \frac{8^n+3}{3^n-4\cdot 8^n}$

Megoldás: A fentiekhez hasonlóan:

$$a_n = \frac{8^n+3}{3^n-4\cdot 8^n} = \frac{8^n}{8^n}\cdot\frac{1+\frac{3}{8^n}}{\frac{3^n}{8^n}-4} = \frac{1+3\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^n}{\left(\frac{3}{8}\right)^n-4} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}.$$

(f) $a_n = \frac{2^n+5\cdot 7^n}{2\cdot 3^n+5\cdot 8^n}$

Megoldás: A fentiekhez hasonlóan:

$$a_n = \frac{2^n+5\cdot 7^n}{2\cdot 3^n+5\cdot 8^n} = \frac{7^n}{8^n}\cdot\frac{\frac{2^n}{7^n}+5}{2\cdot\frac{3^n}{8^n}+5} = \left(\frac{7}{8}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^n+5}{2\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^n+5}.$$

A tört határértéke $\frac{5}{5}=1$, a $\left(\frac{7}{8}\right)^n$ tényező pedig 0-hoz tart, így a sorozat határértéke 0:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5\cdot 7^n}{2\cdot 3^n+5\cdot 8^n} = 0.$$

Az eddigiek alapján az ilyen típusú határértékek is ,,ránézésre" kitalálhatók: a határérték a számlálóban és a nevezőben előforduló ,,legerősebb" tagok együtthatóinak hányadosa, ha ezek a ,,legerősebb" tagok egyforma erősek, azaz ugyanolyan alapú hatványok. Ellenkező esetben, ha a nevezőben ,,erősebb" tag van, mint a számlálóban, akkor a határérték 0, ha pedig a számláló az ,,erősebb", akkor a ,,legerősebb" tagok együtthatóinak hányadosa mutatja meg, hogy milyen előjelű végtelen a határérték: pozitív esetben $+\infty$, negatív esetben pedig $-\infty$.

(g) $a_n = \frac{3^{n+1}+2\cdot 5^n}{5^{n+2}-2\cdot 2^{2n}}$

Megoldás: A fentiek alkalmazhatóságának feltétele, hogy az n-t tartalmazó hatványkitevők azonosak legyenek, ezért először átalakítással ezt érjük el:

$$a_n = \frac{3^{n+1}+2\cdot 5^n}{5^{n+2}-2\cdot 2^{2n}} = \frac{3^n\cdot 3+2\cdot 5^n}{5^n\cdot 5^2-2\cdot(2^2)^n} = \frac{3\cdot 3^n+2\cdot 5^n}{25\cdot 5^n-2\cdot 4^n}.$$

,,Ránézésre" a határérték a ,,legerősebb" hatványok, tehát az 5^n tagok együtthatóinak hányadosa: $\frac{2}{25}$. A következő számítás ezt igazolja:

$$a_n = \frac{3^{n+1}+2\cdot 5^n}{5^{n+2}-2\cdot 2^{2n}} = \frac{3\cdot 3^n+2\cdot 5^n}{25\cdot 5^n-2\cdot 4^n} = \frac{5^n}{5^n}\cdot\frac{3\cdot\frac{3^n}{5^n}+2}{25-2\cdot\frac{4^n}{5^n}} = \frac{3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n+2}{25-2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n} \longrightarrow \frac{2}{25}.$$

(h) $a_n = \frac{2^{2n}+3^{10}}{2^5-5^{n+3}}$

Megoldás: A fentiek alkalmazhatóságának feltétele, hogy az n-t tartalmazó hatványkitevők azonosak legyenek, ezért először átalakítással ezt érjük el:

$$a_n = \frac{2^{2n}+3^{10}}{2^5-5^{n+3}} = \frac{4^n+3^{10}}{2^5-5^n\cdot 5^3} = \frac{4^n+3^{10}}{2^5-5^3\cdot 5^n}.$$

,,Ránézésre" a határérték 0, mivel a nevezőben 5^n, a számlálóban pedig csak 4^n a legnagyobb alapú hatvány. A következő számítás ezt igazolja:

$$a_n = \frac{2^{2n}+3^{10}}{2^5-5^{n+3}} = \frac{4^n+3^{10}}{2^5-5^3\cdot 5^n} = \frac{4^n}{5^n}\cdot\frac{1+3^{10}\cdot\frac{1}{4^n}}{2^5\cdot\frac{1}{5^n}-5^3} = \left(\frac{4}{5}\right)^n\cdot\frac{1+3^{10}\cdot\frac{1}{4^n}}{2^5\cdot\frac{1}{5^n}-5^3} \longrightarrow 0,$$

hiszen a tört határértéke $\frac{1}{-5^3} = -\frac{1}{125}$, a $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ tényező pedig 0-hoz tart.

(i) $a_n = \frac{4^{3n}-10^n}{10^8-7^{2n}}$

Megoldás: Először átalakítjuk a kifejezést:

$$a_n = \frac{4^{3n}-10^n}{10^8-7^{2n}} = \frac{(4^3)^n-10^n}{10^8-(7^2)^n} = \frac{64^n-10^n}{10^8-49^n} \longrightarrow -\infty,$$

hiszen a számlálóban 64^n, a nevezőben pedig -49^n a „meghatározó” tag. A részletes számítás a fentiek alapján végzendő el.

(j) $a_n = \frac{3\cdot 2^{3n+1}-3^n}{5\cdot 8^{1+n}-5^{n+1}}$

Megoldás: Először átalakítjuk a kifejezést:

$$a_n = \frac{3\cdot 2^{3n+1}-3^n}{5\cdot 8^{1+n}-5^{n+1}} = \frac{3\cdot (2^3)^n\cdot 2^1-3^n}{5\cdot 8^1\cdot 8^n-5^n\cdot 5^1} = \frac{6\cdot 8^n-3^n}{40\cdot 8^n-5\cdot 5^n} \longrightarrow \frac{6}{40} = \frac{3}{20},$$

hiszen a számlálóban és a nevezőben egyaránt 8^n a „meghatározó” tag. A számlálóban és a nevezőben egyaránt 8^n-t kell kiemelni, a fentiek mintájára.

(k) $a_n = \frac{4^{n+1}+6^{n-2}}{3^{n+3}-6^{n-1}}$

Megoldás: Először átalakítjuk a kifejezést:

$$a_n = \frac{4^{n+1}+6^{n-2}}{3^{n+3}-6^{n-1}} = \frac{4^n\cdot 4+6^n\cdot 6^{-2}}{3^n\cdot 3^3-6^n\cdot 6^{-1}} = \frac{4\cdot 4^n+\frac{1}{6^2}\cdot 6^n}{3^3\cdot 3^n-\frac{1}{6}\cdot 6^n} =\longrightarrow \frac{\frac{1}{6^2}}{-\frac{1}{6}} = -\frac{1}{6},$$

hiszen a számlálóban és a nevezőben egyaránt 6^n a „meghatározó” tag. A számlálóban és a nevezőben egyaránt 6^n-t kell kiemelni, a fentiek mintájára.

(l) $a_n = \frac{3^{2n+1}+5^n}{9^{n+3}+2^{3n}}$

Megoldás: Először átalakítjuk a kifejezést:

$$a_n = \frac{3^{2n+1}+5^n}{9^{n+3}+2^{3n}} = \frac{(3^2)^n\cdot 3^1+5^n}{9^n\cdot 9^3+(2^3)^n} = \frac{3\cdot 9^n+5^n}{729\cdot 9^n+8^n} =\longrightarrow \frac{3}{729} = \frac{1}{243},$$

hiszen a számlálóban és a nevezőben egyaránt 9^n a „meghatározó” tag, így számlálóban és a nevezőben egyaránt 9^n-t kell kiemelni, a fentiek mintájára.

(m) $a_n = \frac{7^{-2+n}+2\cdot 8^{n+2}}{-3^{n-1}+5\cdot 2^{2+3n}}$

Megoldás: Először átalakítjuk a kifejezést:

$$a_n = \frac{7^{-2+n}+2\cdot 8^{n+2}}{-3^{n-1}+5\cdot 2^{2+3n}} = \frac{7^{-2}\cdot 7^n+2\cdot 8^n\cdot 8^2}{-3^n\cdot 3^{-1}+5\cdot 2^2\cdot (2^3)^n} = \frac{\frac{1}{7^2}\cdot 7^n+128\cdot 8^n}{-\frac{1}{3}\cdot 3^n+20\cdot 8^n} =\longrightarrow \frac{128}{20} = \frac{32}{5},$$

hiszen a számlálóban és a nevezőben egyaránt 8^n a „meghatározó” tag, így a számlálóban és a nevezőben egyaránt 8^n-t kell kiemelni, a fentiek mintájára.

(n) $a_n = \frac{5^{n+3}-4\cdot 3^{2n+1}}{4^{n-1}+2^{2+3n}}$

Megoldás: Először átalakítjuk a kifejezést:

$$a_n = \frac{5^{n+3}-4\cdot 3^{2n+1}}{4^{n-1}+2^{2+3n}} = \frac{5^3\cdot 5^n-4\cdot (3^2)^n\cdot 3^1}{4^n\cdot 4^{-1}+2^2\cdot (2^3)^n} = \frac{5^3\cdot 5^n-12\cdot 9^n}{\frac{1}{4}\cdot 4^n+4\cdot 8^n} =\longrightarrow -\infty,$$

hiszen a számlálóban 9^n a „meghatározó” hatvány negatív előjellel, ami nagyobb, mint a nevezőben a „meghatározó” hatvány: 8^n, pozitív előjellel.

(o) $a_n = \frac{3^{n+3}-5\cdot 2^{2n+1}}{25\cdot 5^{n-2}+3^{1+3n}}$

Megoldás: Először átalakítjuk a kifejezést:

$$a_n = \frac{3^{n+3}-5\cdot 2^{2n+1}}{25\cdot 5^{n-2}+3^{1+3n}} = \frac{3^n\cdot 3^3-5\cdot(2^2)^n\cdot 2^1}{25\cdot 5^n\cdot 5^{-2}+3^1\cdot(3^3)^n} = \frac{3^3\cdot 3^n-10\cdot 4^n}{25\cdot 5^n\cdot \frac{1}{25}+3\cdot 27^n} \longrightarrow 0,$$

hiszen a számlálóban 4^n a ,,meghatározó" hatvány, ami kisebb, mint a nevezőben a ,,meghatározó" hatvány: 27^n.

(p) $a_n = \frac{-9^{2n-1}+3\cdot 5^{n+2}}{-3^{n+1}-4\cdot 3^{2n+1}}$

Megoldás: Először átalakítjuk a kifejezést:

$$a_n = \frac{-9^{2n-1}+3\cdot 5^{n+2}}{-3^{n+1}-4\cdot 3^{2n+1}} = \frac{-(9^2)^n\cdot 9^{-1}+3\cdot 5^n\cdot 5^2}{-3^n\cdot 3^1-4\cdot(3^2)^n\cdot 3^1} = \frac{-\frac{1}{9}\cdot 81^n+75\cdot 5^n}{-3\cdot 3^n\cdot\frac{1}{25}-12\cdot 9^n} \longrightarrow +\infty,$$

hiszen a számlálóban 81^n a ,,meghatározó" hatvány, ami nagyobb, mint a nevezőben a ,,meghatározó" hatvány: 9^n, és azonos az előjelük, mindkettő negatív.

11. Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

(a) $a_n = \frac{4^{2n+1}+3\cdot 2^{3n+2}}{7\cdot 4^{n-2}+9^{n-1}}$

Megoldás: Először átalakítjuk a kifejezést, az előző feladatokban alkalmazott módszerrel:

$$a_n = \frac{4^{2n+1}+3\cdot 2^{3n+2}}{7\cdot 4^{n-2}+9^{n-1}} = \frac{(4^2)^n\cdot 4^1+3\cdot(2^3)^n\cdot 2^2}{7\cdot 4^n\cdot 4^{-2}+9^n\cdot 9^{-1}} = \frac{4\cdot 16^n+12\cdot 8^n}{\frac{7}{16}\cdot 4^n+\frac{1}{9}\cdot 9^n}.$$

Látható, hogy a legnagyobb alapú hatvány a számlálóban 16^n pozitív együtthatóval, míg a nevezőben 9^n ugyancsak pozitív együtthatóval, így a fentiekben alkalmazott módszerrel (számlálóban 16^n-t, nevezőben pedig 9^n-t kiemelve) kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{2n+1}+3\cdot 2^{3n+2}}{7\cdot 4^{n-2}+9^{n-1}} = +\infty.$$

(b) $a_n = \frac{3^{n-2}-4\cdot 5^{3n+1}}{2\cdot 5^{3n-2}+4^{1+2n}}$

Megoldás: Először átalakítjuk a kifejezést, az előző feladatokban alkalmazott módszerrel:

$$a_n = \frac{3^{n-2}-4\cdot 5^{3n+1}}{2\cdot 5^{3n-2}+4^{1+2n}} = \frac{3^n\cdot 3^{-2}-4\cdot(5^3)^n\cdot 5^1}{2\cdot(5^3)^n\cdot 5^{-2}+4^1\cdot(4^2)^n} = \frac{\frac{1}{9}\cdot 3^n-20\cdot 125^n}{\frac{2}{25}\cdot 125^n+4\cdot 16^n}.$$

Látható, hogy a legnagyobb alapú hatvány a számlálóban és a nevezőben is 125^n, s az együtthatóik hányadosa $\frac{-20}{\frac{2}{25}} = -250$, vagyis

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-2}-4\cdot 5^{3n+1}}{2\cdot 5^{3n-2}+4^{1+2n}} = -250.$$

(c) $a_n = \frac{5\cdot 2^{3n-2}+3\cdot 3^{2n+1}}{7\cdot 8^{n+2}-3^{2+3n}}$

Megoldás: Először átalakítjuk a kifejezést, az előző feladatokban alkalmazott módszerrel:

$$a_n = \frac{5\cdot 2^{3n-2}+3\cdot 3^{2n+1}}{7\cdot 8^{n+2}-3^{2+3n}} = \frac{5\cdot(2^3)^n\cdot 2^{-2}+3\cdot(3^2)^n\cdot 3^1}{7\cdot 8^n\cdot 8^2-3^2\cdot(3^3)^n} = \frac{\frac{5}{4}\cdot 8^n+9\cdot 9^n}{7\cdot 64\cdot 8^n-9\cdot 27^n}.$$

Látható, hogy a legnagyobb alapú hatvány a számlálóban 9^n, a nevezőben pedig 27^n, ezért a határérték a fentiek alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 2^{3n-2} + 3 \cdot 3^{2n+1}}{7 \cdot 8^{n+2} - 3^{2+3n}} = 0.$$

(d) $a_n = \frac{-3^{n+3} - 6 \cdot 6^{2n+1}}{2 \cdot 6^{n-2} + 2^{3n-1}}$

Megoldás: Először átalakítjuk a kifejezést, az előző feladatokban alkalmazott módszerrel:

$$a_n = \frac{-3^{n+3} - 6 \cdot 6^{2n+1}}{2 \cdot 6^{n-2} + 2^{3n-1}} = \frac{-3^n \cdot 3^3 - 6 \cdot (6^2)^n \cdot 6^1}{2 \cdot 6^n \cdot 6^{-2} + (2^3)^n \cdot 2^{-1}} = \frac{-27 \cdot 3^n - 36 \cdot 36^n}{\frac{2}{36} \cdot 6^n + \frac{1}{2} \cdot 8^n}.$$

Látható, hogy a legnagyobb alapú hatvány a számlálóban 36^n, negatív együtthatóval, a nevezőben pedig kisebb, 8^n, pozitív együtthatóval, ezért a határérték a fentiek alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3^{n+3} - 6 \cdot 6^{2n+1}}{2 \cdot 6^{n-2} + 2^{3n-1}} = -\infty.$$

(e) $a_n = \frac{-4^{2n+2} + 3 \cdot 2^{3n-1}}{2 \cdot 7^{n+1} + 2^{4n+2}}$

Megoldás: Aki az előző feladatokat gondosan végigcsinálta, az most már tényleg ránézésre meg tudja állapítani egy ilyen kifejezés határértékét: számolgatás nélkül is látható, hogy a számlálóban a $-4^{2n+2} = -(4^2)^n \cdot 4^2 = -16 \cdot 16^n$ tag egy $4^2 = 16$ alapú hatványt „hoz”, $-4^2 = -16$ együtthatóval, míg a másik tag, a $3 \cdot 2^{3n-1}$ „hozadéka” csupán egy $2^3 = 8$ alapú hatvány, azzal nem is kell foglalkozni. Tehát a számláló „nagyságrendjét” $-4^{2n+2} = -16 \cdot 16^n$ határozza meg. Hasonlóan, egy pillantást vetve a nevezőre láthatjuk, hogy annak nagyságrendjét pedig a $2^{4n+2} = 4 \cdot 16^n$ határozza meg, a másik tagban a 7 alapú hatvány „eltörpül” emellett, így a határérték a meghatározó tagok együtthatóinak hányadosa, azaz $\frac{-16}{4} = -4$. Persze, ezt célszerű az előző feladatokban alkalmazott módszerrel kiszámolni:

$$a_n = \frac{-4^{2n+2} + 3 \cdot 2^{3n-1}}{2 \cdot 7^{n+1} + 2^{4n+2}} = \frac{-(4^2)^n \cdot 4^2 + 3 \cdot (2^3)^n \cdot 2^{-1}}{2 \cdot 7^n \cdot 7^1 + (2^4)^n \cdot 2^2} = \frac{-16 \cdot 16^n + \frac{3}{2} \cdot 8^n}{14 \cdot 7^n + 4 \cdot 16^n}.$$

Látható, hogy a legnagyobb alapú hatvány a számlálóban és a nevezőben egyaránt 16^n, ezért a határérték a fentiek alapján az együtthatóik hányadosa:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-4^{2n+2} + 3 \cdot 2^{3n-1}}{2 \cdot 7^{n+1} + 2^{4n+2}} = \frac{-16}{4} = -4.$$

(f) $a_n = \frac{6^{-n+2} + 5^{n+7}}{2^{-n-1} - 3^n}$

Megoldás: Módszerünk csak azonos kitevőjű hatványoknál teszi lehetővé, hogy pusztán az alapok összehasonlításával operáljunk, s itt a negatív $-n$ kitevők újszerűnek tűnnek, de semmi baj: a negatív hatványkitevő pozitívra vaáltozik, ha az alapot a reciprokára cseréljük:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n,$$

ezt fogjuk alkalmazni. Ellenőrizzük figyelmesen az egymást követő lépéseket:

$$a_n = \frac{6^{-n+2} + 5^{n+7}}{2^{-n-1} - 3^n} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2} + 5^{n+7}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 3^n} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} + 5^n \cdot 5^7}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 - 3^n} = \frac{6^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n + 5^7 \cdot 5^n}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3^n}.$$

Látható, hogy a legnagyobb alapú hatvány a számlálóban 5^n, pozitív előjellel, a nevezőben pedig kisebb, 3^n, ami negatív előjellel szerepel, ezért a határérték a fentiek alapján:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6^{-n+2}+5^{n+7}}{2^{-n-1}-3^n} = -\infty.$$

(g) $a_n = \frac{3^{n+2}-4^{2n}}{5^{-2n}-2^{4n+1}}$

Megoldás: Először átalakítjuk a kifejezést, az előző feladatban látott módon, különös tekintettel a negatív n-t tartalmazó kitevőkre:

$$a_n = \frac{3^{n+2}-4^{2n}}{5^{-2n}-2^{4n+1}} = \frac{3^n\cdot 3^2-(4^2)^n}{(5^{-2})^n-(2^4)^n\cdot 2^1} = \frac{9\cdot 3^n-16^n}{\left(\frac{1}{5^2}\right)^n-2\cdot 16^n}.$$

Látható, hogy a legnagyobb alapú hatvány a számlálóban és a nevezőben egyaránt 16^n, melyek együtthatóinak hányadosa a határérték:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+2}-4^{2n}}{5^{-2n}-2^{4n+1}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

12. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $a_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$

Megoldás: Ez a feladat az $a_n = \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}$ sorozat vizsgálatára vezethető vissza, ahol $\frac{1}{b_n} > -1$, és b_n határértéke $+\infty$, vagy $-\infty$. Erről azt kell tudni, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e.$$

Az e szám egyébként a $b_n = n$ választással, tehát az

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

határértékkel is definiálható. A feladatunkban, és a következő feladatokban a számításokat erre az esetre fogjuk visszavezetni, alkalmas b_n sorozat választásával, egyszerű algebrai átalakításokkal. Fontos megjegyezni, hogy a zárójelben tehát az 1 számhoz egy nullához tartó sorozat van hozzáadva, a kitevő pedig pontosan ennek a nullsorozatnak a reciproka. Esetünkben nem ez a helyzet, mert az 1-hez $\frac{3}{n}$ van hozzáadva, ami ugyan 0-hoz tart, de a kitevő n nem a reciproka. Úgy fogunk eljárni, hogy mégis az legyen:

$$a_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}..?..,$$

persze, most nem áll fenn az egyenlőség, tehát a ..?.. helyére valami olyat kell írni, hogy mégis fennálljon. Ugyanakkor, amit eddig leírtunk, annak pontosan e a határértéke, hiszen a $b_n = \frac{n}{3}$ választással megfelel a fenit feltételeknek, így ezt nem szeretnénk megváltoztatni. Hogy az egyenlőség is fennálljon, a ..?.. helyére a köbre emelést kell képzelni, hiszen akkor az $\frac{n}{3}$ és 3 kitevők összeszorzódnak, és azt kapjuk, hogy

$$a_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3.$$

Így most minden rendben van, de mennyi a határérték? Mivel az $\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$ határértéke – a fentiekben mondottak szerint – e, ezért a harmadik hatványának a határértéke e^3 – a határértékről tanult számolási szabályok alapján. Végül tehát:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3=e^3.$$

(b) $a_n=\left(1-\frac{6}{n}\right)^n$

Megoldás: A fentiek mintájára:

$$a_n=\left(1-\frac{6}{n}\right)^n=\left[\left(1-\frac{6}{n}\right)^{-\frac{n}{6}}\right]^{-6}.$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés megfelel a feltételeknek a $b_n=-\frac{n}{6}$ feltétellel, így

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{6}{n}\right)^n=\left[\left(1-\frac{6}{n}\right)^{-\frac{n}{6}}\right]^{-6}=e^{-6}=\frac{1}{e^6}.$$

(c) $a_n=\left(1+\frac{7}{n}\right)^{21}$

Megoldás: Ez a kifejezés nem tartozik az előbbi típusba, hiszen a kitevő nem tart végtelenhez. A zárójelben levő kifejezés határértéke $1+0=1$, így a 21-edik hatványának $1^{21}=1$ a határértéke:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{21}=1^{21}=1.$$

(d) $a_n=\left(1+\frac{9}{n}\right)^{23}+\left(\frac{2}{7}\right)^n$

Megoldás: Az összeg egyik tagja sem tartozik az előbbi típusba, hiszen az elsőben a kitevő nem tart végtelenhez, a másodikban pedig nem 1-hez van hozzáadva egy nullsorozat. Az első tagnál a zárójelben levő kifejezés határértéke $1+0=1$, így a 23-adik hatványának $1^{23}=1$ a határértéke:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{n}\right)^{23}=1^{23}=1.$$

A második tagnál egy 1-nél kisebb abszolút értékű szám hatványai képezik a sorozat tagjait, melyek határértéke 0:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n=0.$$

Végül:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{n}\right)^{23}+\left(\frac{2}{7}\right)^n=1+0=1.$$

(e) $a_n=\left(1+\frac{8}{n}\right)^{100}-\left(\frac{3}{8}\right)^{-n}$

Megoldás: Az első sorozat a korábbiakhoz hasonlóan 1-hez tart:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{8}{n}\right)^{100}=1^{100}=1.$$

A második tagnál más a helyzet: ugyanis $-\left(\frac{3}{8}\right)^{-n}=-\left(\frac{8}{3}\right)^n$, s mivel egy 1-nél nagyobb szám hatványai $+\infty$-hez tartanak, így a a második tag határértéke $-\infty$, végül tehát

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{8}{n}\right)^{100}-\left(\frac{3}{8}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{8}{n}\right)^{100}-\left(\frac{8}{3}\right)^n=-\infty.$$

(f) $a_n = \left(1+\frac{5}{n}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{-n}$

Megoldás: Az első sorozat esetén:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^5 = e^5,$$

a másodiknál pedig

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} 3^n = +\infty,$$

ezért az összegre

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^5 + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} = +\infty$$

adódik.

(g) $a_n = \left(1+\frac{6}{n}\right)^{-n} - \left(\frac{2}{9}\right)^n$

Megoldás: Az első sorozat esetén:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{n}\right)^{\frac{n}{6}}\right]^{-6} = e^{-6},$$

a másodiknál pedig

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n = 0,$$

ezért az összegre

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n}\right)^{-n} - \left(\frac{2}{9}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{n}\right)^{\frac{n}{6}}\right]^{-6} - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n = e^{-6} - 0 = e^{-6} = \frac{1}{e^6}.$$

adódik.

(h) $a_n = 7\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)^{10} - 5\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^n$

Megoldás: Az első sorozat esetén:

$$\lim_{n\to\infty} 7\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)^{10} = 7\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{10} = 7\cdot(1+0)^{10} = 7,$$

a másodiknál pedig

$$\lim_{n\to\infty} -5\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^n = -\infty,$$

ezért az összegre

$$\lim_{n\to\infty} 7\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)^{10} - 5\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 7\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)^{10} + \lim_{n\to\infty} -5\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^n = 7+(-\infty) = -\infty.$$

adódik.

(i) $a_n = 2\cdot\left(1+\frac{5}{n}\right)^{-n} + 3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n$

Megoldás: Az első tagnál:

$$\lim_{n\to\infty} 2\cdot\left(1+\frac{5}{n}\right)^{-n} = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\cdot\left[\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^{-5} = 2\cdot e^{-5},$$

a másodiknál pedig

$$\lim_{n\to\infty} 3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0,$$

ezért az összegre

$$\lim_{n\to\infty} 2\cdot\left(1+\frac{5}{n}\right)^{-n} + 3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^{-5} + 3\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 2\cdot e^{-5}+0 = \frac{2}{e^5}.$$

adódik.

(j) $a_n = -\left(1+\frac{3}{n}\right)^n + 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}$

Megoldás: Az első tagnál:

$$\lim_{n\to\infty} -\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = -\lim_{n\to\infty}\cdot\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3 = -e^3,$$

a másodiknál pedig

$$\lim_{n\to\infty} 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = 6\cdot\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty,$$

ezért az összegre

$$\lim_{n\to\infty} -\left(1+\frac{3}{n}\right)^n + 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = -\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n + 6\cdot\lim_{n\to\infty} 2^n = -e^3+\infty = +\infty.$$

adódik.

(k) $a_n = -3\cdot\left(1-\frac{9}{n}\right)^{-n} - 2\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{-n}$

Megoldás: Az első tagnál:

$$\lim_{n\to\infty} -3\cdot\left(1-\frac{9}{n}\right)^{-n} = -3\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{9}{n}\right)^{-\frac{n}{9}}\right]^9 = -3e^9,$$

a másodiknál pedig

$$\lim_{n\to\infty} -2\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{-n} = -2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n = 0,$$

ezért az összegre

$$\lim_{n\to\infty} -3\cdot\left(1-\frac{9}{n}\right)^{-n} - 2\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{-n} = -3\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{9}{n}\right)^{-\frac{n}{9}}\right]^9 - 2\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^n = -3e^9+0 = -3e^9.$$

adódik.

(l) $a_n = 6\cdot\left(1+\frac{7}{n}\right)^n - 8\cdot\left(\frac{4}{11}\right)^{-n}$

Megoldás: Az első tagnál:

$$\lim_{n\to\infty} 6\cdot\left(1+\frac{7}{n}\right)^n = 6\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{7}{n}\right)^{\frac{n}{7}}\right]^7 = 6e^7,$$

a másodiknál pedig

$$\lim_{n\to\infty} -8\cdot\left(\frac{4}{11}\right)^{-n} = -8\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{11}{4}\right)^n = -\infty,$$

ezért az összegre

$$\lim_{n\to\infty} 6\cdot\left(1+\frac{7}{n}\right)^n - 8\cdot\left(\frac{4}{11}\right)^{-n} = 6\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{7}{n}\right)^{\frac{n}{7}}\right]^7 - 8\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{11}{4}\right)^n = 6e^7-\infty = -\infty.$$

adódik.

(m) $a_n = 7 \cdot \left(1 - \frac{11}{n}\right)^n + 4 \cdot n^{-4}$

Megoldás: Az első tagnál:

$$\lim_{n\to\infty} 7 \cdot \left(1 - \frac{11}{n}\right)^n = 7 \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{11}{n}\right)^{-\frac{n}{11}}\right]^{-11} = 7e^{-11},$$

a másodiknál pedig

$$\lim_{n\to\infty} 4 \cdot n^{-4} = 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} = 0,$$

ezért az összegre

$$\lim_{n\to\infty} 7 \cdot \left(1 - \frac{11}{n}\right)^n + 4 \cdot n^{-4} = 7 \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{11}{n}\right)^{-\frac{n}{11}}\right]^{-11} + 4 \cdot \lim_{n\to\infty} n^{-4} = 7e^{-11} + 4 \cdot 0 = 7e^{-11}.$$

adódik.