MATEMATIKA II.
Lineáris algebra

1. Legyen $\underline{a}(-3,2,4), \underline{b}(-2,1,-2), \underline{c}(3,-4,5), \underline{d}(8,-5,7)$

(a) $2\underline{a} - 4\underline{c} + 6\underline{d}$

Megoldás: A megadott vektorokkal az összeadást, kivonást és a számokkal való szorzást koordinánként kell elvégezni: az eredményvektor első koordinátája az első koordinátákon elvégzett megfelelő művelet eredménye lesz, a második koordinátája a második koordinátákon elvégzett megfelelő művelet eredménye lesz, stb. Tehát:

$$2\underline{a} - 4\underline{c} + 6\underline{d} =$$
$$\Big(2\cdot(-3) - 4\cdot 3 + 6\cdot 8, 2\cdot 2 - 4\cdot(-4) + 6\cdot(-5), 2\cdot 4 - 4\cdot 5 + 6\cdot 7\Big) = (30,-10,30).$$

(b) $\underline{c} + 3\underline{b} - 7\underline{a}$

Megoldás: A megadott vektorokkal a műveleteket koordinánként kell elvégezni, tehát:

$$\underline{c} + 3\underline{b} - 7\underline{a} =$$
$$\Big(3 + 3\cdot(-2) - 7\cdot(-3), -4 + 3\cdot 1 - 7\cdot 2, 5 + 3\cdot(-2) - 7\cdot 4\Big) = (18,-15,-29).$$

(c) $\|2\underline{d} - 3\underline{c} + \underline{b}\|$

Megoldás: Általában, egy $\underline{a}$ vektor normája, vagy hossza az

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{\langle \underline{a}, \underline{a}\rangle}$$

nemnegatív valós szám. Ez pontosan az $\underline{a}$ vektor koordinátái négyzeteinek összegéből vont négyzetgyök: ha $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, akkor tehát

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Esetünkben először a $2\underline{d} - 3\underline{c} + \underline{b}$ vektor koordinátáit kell kiszámolni, ahogy az előző feladatokban tettük:

$$2\underline{d} - 3\underline{c} + \underline{b} =$$
$$\Big(2\cdot 8 - 3\cdot 3 + (-2), 2\cdot(-5) - 3\cdot(-4) + 1, 2\cdot 7 - 3\cdot 5 + (-2)\Big) = (5,3,-3).$$

Ezért

$$\|2\underline{d} - 3\underline{c} + \underline{b}\| = \|(5,3,-3)\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9+9} = \sqrt{43} \approx 6.56$$

(d) $\|4\underline{a} + 8\underline{b} - 7\underline{c}\|$

Megoldás: Először a $4\underline{a} + 8\underline{b} - 7\underline{c}$ vektor koordinátáit kell kiszámolni, ahogy az előző feladatokban tettük:

$$4\underline{a} + 8\underline{b} - 7\underline{c} =$$
$$\Big(4\cdot(-3) + 8\cdot(-2) - 7\cdot 3, 4\cdot 2 + 8\cdot 1 - 7\cdot(-4), 4\cdot 4 + 8\cdot(-2) - 7\cdot 5\Big) = (-49,44,-35).$$

Ezért

$$\|4\underline{a} + 8\underline{b} - 7\underline{c}\| = \|(-49,44,-35)\| = \sqrt{(-49)^2 + 44^2 + (-35)^2}$$
$$= \sqrt{2401 + 1936 + 1225} = \sqrt{5562} \approx 74.58$$

2. Legyen $\underline{a}(1.7, 2.3, -4.4), \underline{b}(3.1, -1.7, 5), \underline{c}(-2.2, 4, -3.5), \underline{d}(8.1, -2.8, -1.7)$

   (a) $-3\underline{b} + 5\underline{c} - \underline{a}$

   Megoldás: A megadott vektorokkal a műveleteket koordinánként kell elvégezni, tehát:

$$-3\underline{b} + 5\underline{c} - \underline{a} =$$

$$\Big(-3\cdot 3.1+5\cdot(-2.2)-1.7, -3\cdot(-1.7)+5\cdot 4-2.3, -3\cdot 5+5\cdot(-3.5)-(-4.4)\Big) = (-22, 22.8, -28.1).$$

   (b) $6\underline{c} + 3\underline{d} - 2\underline{b}$

   Megoldás: A megadott vektorokkal a műveleteket koordinánként kell elvégezni, tehát:

$$6\underline{c} + 3\underline{d} - 2\underline{b} =$$

$$\Big(6\cdot(-2.2)+3\cdot 8.1-2\cdot 3.1, 6\cdot 4+3\cdot(-2.8)-2\cdot(-1.7), 6\cdot(-3.5)+3\cdot(-1.7)-2\cdot 5\Big) = (4.9, 19, -36.1).$$

   (c) $\|\underline{d} + 2\underline{a} - 5\underline{b}\|$

   Megoldás: Először a $\underline{d} + 2\underline{a} - 5\underline{b}$ vektor koordinátáit kell kiszámolni, ahogy az előző feladatokban tettük:

$$\underline{d} + 2\underline{a} - 5\underline{b} =$$

$$\Big(8.1 + 2 \cdot 1.7 - 5 \cdot 3.1, -2.8 + 2 \cdot 2.3 - 5 \cdot (-1.7), -1.7 + 2 \cdot (-4.4) - 5 \cdot 5\Big) = (-4, 10.3, -35.5).$$

   Ezért

$$\|\underline{d} + 2\underline{a} - 5\underline{b}\| = \|(-4, 10.3, -35.5)\| = \sqrt{(-4)^2 + 10.3^2 + (-35.5)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 106.09 + 1260.25} = \sqrt{1382.34} \approx 37.18$$

   (d) $\|2\underline{b} - \underline{c} - 3\underline{a}\|$

   Megoldás: Először a $2\underline{b} - \underline{c} - 3\underline{a}$ vektor koordinátáit kell kiszámolni, ahogy az előző feladatokban tettük:

$$2\underline{b} - \underline{c} - 3\underline{a} =$$

$$\Big(2 \cdot 3.1 - (-2.2) - 3 \cdot 1.7, 2 \cdot (-1.7) - 4 - 3 \cdot 2.3, 2 \cdot 5 - (-3.5) - 3 \cdot (-4.4)\Big) = (3.3, -14.3, 26.7).$$

   Ezért

$$\|2\underline{b} - \underline{c} - 3\underline{a}\| = \|(3.3, -14.3, 26.7)\| = \sqrt{3.3^2 + (-14.3)^2 + 26.7^2}$$
$$= \sqrt{10.89 + 204.49 + 712.89} = \sqrt{928.27} \approx 30.47$$

3. Legyen $\underline{a}(5, 6, -8), \underline{b}(-2, 3, -1), \underline{c}(-3, 4, -2), \underline{d}(1, 2, -2)$

   (a) $\underline{a}\,\underline{d} = \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$

   Megoldás: Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok skaláris szorzata alatt a következő számot értjük: ha $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, akkor

$$\underline{a}\,\underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n.$$

   A skaláris szorzatot szokás $\langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$ módon is jelölni.

   Esetünkben tehát

$$\underline{a}\,\underline{d} = 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + (-8) \cdot (-2) = 33.$$

(b) $\underline{b}\,4\underline{c} = \langle \underline{b}, 4\underline{c} \rangle$

Megoldás: Először is

$$4\underline{c} = (4 \cdot (-3), 4 \cdot 4, 4 \cdot (-2)) = (-12, 16, -8),$$

ezért

$$\langle \underline{b}, 4\underline{c} \rangle = (-2) \cdot (-12) + 3 \cdot 16 + (-1) \cdot (-8) = 80.$$

(c) $3\underline{a}\,(\underline{d} + \underline{b}) = \langle 3\underline{a}, \underline{d} + \underline{b} \rangle$

Megoldás: Először is

$$3\underline{a} = (3 \cdot 5, 3 \cdot 6, 3 \cdot (-8)) = (15, 18, -24),$$

és

$$\underline{d} + \underline{b} = (1 + (-2), 2 + 3, (-2) + (-1)) = (-1, 5, -3).$$

Ezért

$$\langle 3\underline{a}, \underline{d} + \underline{b} \rangle = 15 \cdot (-1) + 18 \cdot 5 + (-24) \cdot (-3) = 147.$$

(d) $(2\underline{d} - \underline{c} + \underline{a})(2\underline{a} + 4\underline{b}) = \langle 2\underline{d} - \underline{c} + \underline{a}, 2\underline{a} + 4\underline{b} \rangle$

Megoldás: Először is

$$2\underline{d} = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot (-2)) = (2, 4, -4),$$

$$2\underline{d} - \underline{c} + \underline{a} = (2 - (-3) + 5, 4 - 4 + 6, (-4) - (-2) + (-8)) = (10, 6, -10),$$

$$2\underline{a} = (2 \cdot 5, 2 \cdot 6, 2 \cdot (-8)) = (10, 12, -16),$$

$$4\underline{b} = (4 \cdot (-2), 4 \cdot 3, 4 \cdot (-1)) = (-8, 12, -4),$$

$$2\underline{a} + 4\underline{b} = (10 + (-8), 12 + 12, (-16) + (-4)) = (2, 24, -20).$$

Ezért

$$\langle 2\underline{d} - \underline{c} + \underline{a}, 2\underline{a} + 4\underline{b} \rangle = 10 \cdot 2 + 6 \cdot 24 + (-10) \cdot (-20) = 364.$$

4. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -8 & 7 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & -4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ -2 & 12 & -9 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) $3\mathbf{B} - 2\mathbf{C}^T$

Megoldás: A két mátrix összege, különbsége és számokkal való szorzata csak akkor lehet értelmes, ha azonos típusúak, vagyis soraik száma, és oszlopaik száma is megegyezik. Ilyenkor ezeket a műveleteket elemenként végezzük el, a mátrixok sorait, illetve oszlopait vektoroknak tekintve. Ezeknél a műveleteknél a típus nem változik. A transzponálás a sorok felcserélését jelenti az oszlopokkal, így az $m \times n$ típusú mátrixból $n \times m$ típusú lesz. Esetünkben a $\mathbf{B}$ mátrix 3×2 típusú, vagyis 3 sora és 2 oszlopa van, s ugyanez a helyzet a $3\mathbf{B}$ mátrixszal. A $\mathbf{C}$ mátrix pedig 2×3 típusú, mert 2 sora és 3 oszlopa van. Ezért a $\mathbf{C}^T$ mátrix 3×2 típusú, ugyanilyen a $2\mathbf{C}^T$ mátrix is, tehát $3\mathbf{B}$ és $2\mathbf{C}^T$ mátrixok azonos típusúak, a kivonás elvégezhető, mégpedig elemenként. A részletek:

$$3\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 12 & -21 \\ 15 & -12 \\ -3 & 18 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}, \ 2\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -14 & 24 \\ 6 & -18 \end{pmatrix},$$

ezért

$$3\mathbf{B}-2\mathbf{C}^T=\begin{pmatrix}12 & -21\\ 15 & -12\\ -3 & 18\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & -4\\ -14 & 24\\ 6 & -18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12-10 & -21-(-4)\\ 15-(-14) & -12-24\\ -3-6 & 18-(-18)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -17\\ 29 & -36\\ -9 & 36\end{pmatrix}.$$

(b) $4\mathbf{A}-6\mathbf{B}$

Megoldás: Az $\mathbf{A}$ mátrix 3×3 típusú, így a $4\mathbf{A}$ mátrix is, míg a $\mathbf{B}$ mátrix 3×2 típusú, így a $6\mathbf{B}$ mátrix is. Tehát a $4\mathbf{A}$ és $6\mathbf{B}$ mátrixok különböző típusúak, ezért a kivonásuk nincs értelmezve.

(c) $\mathbf{AB}$

Megoldás: Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok **ebben a sorrendben** csak akkor szorozhatók össze, tehát $\mathbf{AB}$ akkor van értelmezve, ha a baloldalon álló $\mathbf{A}$ mátrixnak ugyanannyi **oszlopa** van, amennyi **sora** a jobboldalon álló $\mathbf{B}$ mátrixnak. Esetünkben az $\mathbf{A}$ mátrix 3×3 típusú, tehát 3 oszlopa van, ami megegyezik a 3×2 típusú $\mathbf{B}$ mátrix sorainak számával. Ezért a szorzás elvégezhető. A szorzat egy olyan $\mathbf{AB}$ mátrix lesz, melynek annyi sora van, mint $\mathbf{A}$-nak, és annyi oszlopa, mint $\mathbf{B}$-nek. Esetünkben tehát az $\mathbf{AB}$ mátrix 3×2 típusú lesz. (Ez most csak véletlenül egyezik meg a $\mathbf{B}$ mátrix típusával!) Ha $\mathbf{A}$ típusa $n\times k$, a $\mathbf{B}$ típusa pedig $k\times m$, akkor $\mathbf{AB}$ értelmezve van, és típusa $n\times m$. Szimbolikusan: $(n\times k)\cdot(k\times m)=n\times m$; a középen álló k eltűnik. Esetünkben a $\mathbf{BA}$ szorzat-mátrix nincs értelmezve, hiszen a baloldali (első) tényező 3×2 típusú, a jobboldali (második) tényező pedig 3×3 típusú – a $\mathbf{B}$ oszlopainak száma nem egyezik meg az $\mathbf{A}$ sorainak számával: $(3\times 2)\cdot(3\times 3)$ nem jó felállás, mert a „középen" álló piros számok különböznek.

Ha az oszlop-sor feltétel – amit kompatibilitási feltételnek nevezünk – teljesül, akkor elvégezhető a szorzás, de hogyan? Nyilvánvaló, hogy nem elemenként, hiszen a két mátrix, amiket összeszorzunk, általában különböző típusúak is lehetnek. A szorzást az úgynevezett **sor-oszlop kompozícióval** végezzük el, ami a következő eljárást jelenti: az $\mathbf{AB}$ mátrix első sorának első elemét úgy kapjuk meg, hogy az $\mathbf{A}$ első sorának első elemét megszorozzuk a $\mathbf{B}$ első oszlopának első elemével, ehhez hozzádjuk az $\mathbf{A}$ első sorának második elemét megszorozva a $\mathbf{B}$ első oszlopának második elemével, és ezt így folytatjuk, egészen az $\mathbf{A}$ első sorának utolsó elemének és a $\mathbf{B}$ első oszlopának utolsó elemének összeszorzásáig, amit hozzádunk az eddigi szorzatokhoz. Ez lesz tehát az $\mathbf{AB}$ mátrix első sorának első eleme. Az $\mathbf{AB}$ mátrix első sorának második elemét ugyanígy kapjuk, csak az $\mathbf{A}$ mátrix első sorának elemeit az előbbi módon a $\mathbf{B}$ mátrix második oszlopának elemeivel kombináljuk. Ezt folytatva végig érünk az $\mathbf{A}$ első sorának a $\mathbf{B}$ összes oszlopaival való kombinálásán, amivel megkaptuk az $\mathbf{AB}$ mátrix első sorát. A második sort ugyanígy kapjuk, az $\mathbf{A}$ második sorának $\mathbf{B}$ összes oszlopaival való kombinálásával, stb. Leírva mindez bonyolultabbnak tűnik, mint végigcsinálni; lássuk mindezt a konkrét $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ összeszorzásánál: az $\mathbf{A}$ első sorának a $\mathbf{B}$ első oszlopával való kombinációja:

$$3\cdot 4+(-1)\cdot 5+2\cdot(-1)=5,$$

ez a szorzat-mátrix első sorának első eleme. Mivel a szorzat-mátrix 3×2 típusú lesz, ezért így fog kinézni:

$$\begin{pmatrix}5 & X\\ X & X\\ X & X\end{pmatrix}.$$

Az X-ek az egyelőre még nem kiszámított elemeket jelentik. Most következik az első sor második eleme: az **A** első sorának a **B** második oszlopával való kombinációja:

$$3 \cdot (-7) + (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot 6 = -5,$$

tehát a szorzat-mátrixunk most így néz ki:

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ X & X \\ X & X \end{pmatrix}.$$

A második sor kitöltése következik, melynek első eleme az **A** második sorának a **B** első oszlopának a kombinációja:

$$(-2) \cdot 4 + (-8) \cdot 5 + 7 \cdot (-1) = -55,$$

vagyis a szorzat-mátrix már így néz ki:

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -55 & X \\ X & X \end{pmatrix}.$$

A második sor második eleme az **A** második sorának és a **B** második oszlopának a kombinációja:

$$(-2) \cdot (-7) + (-8) \cdot (-4) + 7 \cdot 6 = 88,$$

szóval itt tartunk:

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -55 & 88 \\ X & X \end{pmatrix}.$$

Az utolsó sor van hátra: a harmadik sor első eleme az **A** harmadik sorának és a **B** első oszlopának a kombinációja:

$$1 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + (-4) \cdot (-1) = 33,$$

tehát ez a helyzet:

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -55 & 88 \\ 33 & X \end{pmatrix}.$$

Végül a harmadik sor második eleme az **A** harmadik sorának és a **B** második oszlopának a kombinációja:

$$1 \cdot (-7) + 5 \cdot (-4) + (-4) \cdot 6 = -51,$$

tehát a végeredmény:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -55 & 88 \\ 33 & -51 \end{pmatrix}.$$

(d) **BC**

Megoldás: Ellenőrizzük a kompatibilitást: a **B** mátrix típusa 3×2, a **C** mátrixé 2×3, tehát az adott sorrendben összeszorozhatók, s a szorzat $(3 \times 2) \cdot (2 \times 3) = 3 \times 3$ típusú lesz.

A szorzást sor-oszlop kompozícióval elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & -4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ -2 & 12 & -9 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4\cdot 5 + (-7)\cdot(-2) & 4\cdot(-7) + (-7)\cdot 12 & 4\cdot 3 + (-7)\cdot(-9) \\ 5\cdot 5 + (-4)\cdot(-2) & 5\cdot(-7) + (-4)\cdot 12 & 5\cdot 3 + (-4)\cdot(-9) \\ (-1)\cdot 5 + 6\cdot(-2) & (-1)\cdot(-7) + 6\cdot 12 & (-1)\cdot 3 + 6\cdot(-9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -112 & 75 \\ 33 & -83 & 51 \\ -17 & 79 & -57 \end{pmatrix}.$$

(e) $\mathbf{A}^2$

Megoldás: Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix 3×3 típusú, így kompatibilis saját magával, s a szorzat ugyancsak 3×3 típusú lesz: $(3 \times 3) \cdot (3 \times 3) = 3 \times 3$. A szorzatot ugyancsak a sor-oszlop kompozícióval számíthatjuk ki:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -8 & 7 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -8 & 7 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot 3 + (-1)\cdot(-2) + 2\cdot 1 & 3\cdot(-1) + (-1)\cdot(-8) + 2\cdot 5 & 3\cdot 2 + (-1)\cdot 7 + 2\cdot(-4) \\ (-2)\cdot 3 + (-8)\cdot(-2) + 7\cdot 1 & (-2)\cdot(-1) + (-8)\cdot(-8) + 7\cdot 5 & (-2)\cdot 2 + (-8)\cdot 7 + 7\cdot(-4) \\ 1\cdot 3 + 5\cdot(-2) + (-4)\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 5\cdot(-8) + (-4)\cdot 5 & 1\cdot 2 + 5\cdot 7 + (-4)\cdot(-4) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 15 & -9 \\ 17 & 101 & -88 \\ -11 & -61 & 53 \end{pmatrix}.$$

(f) $\mathbf{AC}$

Megoldás: A kompatibilitási feltétel nem teljesül, mert az $\mathbf{A}$ mátrix 3×3 típusú, a $\mathbf{C}$ mátrix pedig 2×3 típusú – az $\mathbf{AC}$ szorzat nincs értelmezve.

(g) $\mathbf{D}^2 - \mathbf{D}$

Megoldás: A kompatibilitási feltétel teljesül: a $\mathbf{D}$ mátrix típusa 2×2, így a $\mathbf{D}^2$ mátrix típusa $(2\times 2)\cdot(2\times 2) = 2\times 2$, s mivel ez megegyezik $\mathbf{D}$ típusával, ezért a kivonás elvégezhető:

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{DD} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -20 \\ -25 & 29, \end{pmatrix}$$

és

$$\mathbf{D}^2 - \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 24 & -20 \\ -25 & 29, \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -24 \\ -30 & 32 \end{pmatrix}.$$

(h) $2\mathbf{B}^T - 3\mathbf{C}$

Megoldás: A $\mathbf{B}$ mátrix típusa 3×2, így a transzponált $\mathbf{B}^T$ mátrixé 2×3, ugyanennyi a $2\mathbf{B}^T$, valamint a $3\mathbf{C}$ mátrixoké is, így a kivonás elvégezhető:

$$2\mathbf{B}^T - 3\mathbf{C} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & -4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}^T - 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ -2 & 12 & -9 \end{pmatrix} =$$

$$2\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ -7 & -4 & 6\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}5 & -7 & 3\\ -2 & 12 & -9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 10 & -2\\ -14 & -8 & 12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}15 & -21 & 9\\ -6 & 36 & -27\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7 & 31 & -11\\ -8 & -44 & 39\end{pmatrix}.$$

(i) $(\mathbf{D}+\mathbf{D}^T)^2$

Megoldás: A kompatibilitási feltétel teljesül: a $\mathbf{D}$ mátrix típusa 2×2, így a $\mathbf{D}^T$ mátrix típusa is 2×2, ezért az összeadás elvégezhető:

$$\mathbf{D}+\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix}-2 & 4\\ 5 & -3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & 4\\ 5 & -3\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}-2 & 4\\ 5 & -3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & 5\\ 4 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 9\\ 9 & -6\end{pmatrix}.$$

Négyzetes mátrix mindig kompatibilis önmagával, hiszen a sorok és az oszlopok száma megegyezik, így a négyzetreemelés elvégezhető:

$$(\mathbf{D}+\mathbf{D}^T)^2 = \begin{pmatrix}-4 & 9\\ 9 & -6\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}-4 & 9\\ 9 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 9\\ 9 & -6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}97 & -90\\ -90 & 117\end{pmatrix}.$$

(j) $\det(\mathbf{D})$

Megoldás: Egy 2×2 típusú mátrix determinánsának kiszámítása: a főátlóban álló elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlóban álló elemek szorzatát:

$$\det(\mathbf{D}) = \det\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 5 & -3\end{pmatrix} = (-2)\cdot(-3) - 4\cdot 5 = 6 - 20 = -14.$$

(k) $\det(\mathbf{A})$

Megoldás: Egy 3×3 típusú mátrix determinánsának kiszámítása visszavezethető 2×2 típusú mátrixok determinánsainak kiszámítására, az úgynevezett *kifejtés* segítségével. Ezt az $\mathbf{A}$ mátrix példáján mutatjuk be.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ -2 & -8 & 7\\ 1 & 5 & -4\end{pmatrix}.$$

A mátrix minden eleméhez tartozik egy *előjeles aldetermináns*, melyet úgy kapunk, hogy az illető elem sorát és oszlopát képzeletben töröljük, s a visszamaradó mátrix determinánsát megszorozzuk $+1$-el, vagy -1-el aszerint, hogy az illető elem **sor- és oszlopszámának összege** páros, vagy páratlan. Ha pl. a kiválasztott elem az **első** sor és **első** oszlop kereszteződésében áll, akkor az előjel $1+1=2$ miatt $+1$. Ha a **második** sor és **harmadik** oszlop kereszteződésében áll, akkor az előjel $2+3=5$ miatt -1, stb. Tehát pl. az első sor második eleméhez tartozó előjeles aldetermináns a következőképpen kapható meg: a szóbanforgó elem a $\mathbf{-1}$, melyet vastagítva jelöltünk, pirossal pedig azokat az elemeket, melyek megmaradnak, amikor a $\mathbf{-1}$ sorát és oszlopát gondolatban töröljük:

$$\begin{pmatrix}3 & \mathbf{-1} & 2\\ -2 & -8 & 7\\ 1 & 5 & -4\end{pmatrix}.$$

Tehát a $\mathbf{-1}$ elemhez tartozó *aldetermináns* az

$$\mathbf{A}_{1,2} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa: $\det \mathbf{A}_{1,2} = (-2) \cdot (-4) - 1 \cdot 7 = 1$. Itt a jelölésben az $\mathbf{A}_{1,2}$ alsó indexei arra utalnak, hogy az **első** sor és **második** oszlop kereszteződésében álló elem aldeterminánsáról van szó, így az *előjeles aldetermináns* előjele $1 + 2 = 3$ (páratlan) miatt -1 lesz, s az *előjeles aldetermináns*: $(-1) \cdot \det \mathbf{A}_{1,2} = (-1) \cdot 1 = -1$.

Visszatérve az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsának kiszámításához, a *kifejtéshez*, a következőt kell tenni: kiválasztjuk az $\mathbf{A}$ mátrix bármelyik sorát, legyen ez most az első. Ennek minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk, s a kapott érték az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa. Tehát

$$\det(\mathbf{A}) = 3 \cdot 1 \cdot \det \mathbf{A}_{1,1} + (-1) \cdot (-1) \cdot \det \mathbf{A}_{1,2} + 2 \cdot 1 \cdot \det \mathbf{A}_{1,3}.$$

Vizsgáljuk meg ezt az egyenlőséget közelebbről: a $3 \cdot 1 \cdot \det \mathbf{A}_{1,1}$ tagban a 3 az első sor első eleme, erre utal a $\det \mathbf{A}_{1,1}$ szimbólumban az $_{1,1}$. Mivel $1+1 = 2$ páros szám, a fentiek alapján az előjel $+1$ lett, ezért írtunk $3 \cdot 1$-et. Végül a szorzat harmadik tényezője a $\det \mathbf{A}_{1,1}$, ami a 3 elemnek megfelelő $\mathbf{A}_{1,1}$ mátrix determinánsa – ez az a mátrix, amit úgy kapunk az $\mathbf{A}$ mátrixból, hogy a 3-at tartalmazó első sort és első oszlopot elhagyjuk:

$$\mathbf{A}_{1,1} = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \ \det \mathbf{A}_{1,1} = (-8) \cdot (-4) - 5 \cdot 7 = 32 - 35 = -3.$$

Hasonlóan:

$$\mathbf{A}_{1,2} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \ \det \mathbf{A}_{1,2} = (-2) \cdot (-4) - 1 \cdot 7 = 8 - 7 = 1,$$

és

$$\mathbf{A}_{1,3} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \ \det \mathbf{A}_{1,3} = (-2) \cdot 5 - 1 \cdot (-8) = -10 + 8 = -2.$$

Így a fenti egyenlőségből megkapjuk $\det \mathbf{A}$-t:

$$\det \mathbf{A} = 3 \cdot 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-2) = -12.$$

Néhány megjegyzés:

i) A kifejtéshez a mátrix bármelyik sorát, sőt, bármelyik oszlopát választhatjuk.

ii) A kifejtéshez célszerű olyan sort, vagy oszlopot választani, amelyikben sok 0 van, esetleg kis számok, 1-esek, stb.

iii) A kifejtés bármilyen rendű, tehát $n \times n$-es mátrixok determinánsának kiszámítására alkalmas, akármilyen $n \geq 3$ egész szám esetén.

(l) Határozzuk meg a

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -10 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinánsát!

Megoldás: Egy determináns kiszámításánál hasznosak lehetnek az úgynevezett *elemi átalakítások*, melyek a következők:

i) Egy mátrix determinánsa nem változik, ha egy tetszőleges sorát vagy oszlopát megszorozzuk egy tetszőleges, nullától kölönböző számmal.

ii) Egy mátrix determinánsa nem változik, ha egy tetszőleges sorához hozzáadjuk egy másik sorát.

iii) Egy mátrix determinánsa nem változik, ha egy tetszőleges oszlopához hozzáadjuk egy másik oszlopát.

iv) Két sor, vagy két oszlop felcserélésével a determináns előjelet vált.

Ilyen átalakításokkal elérhetjük, hogy valamelyik sorban, vagy oszlopban legfeljebb egy nullától különböző elem legyen, mert akkor már egyszerű lesz a kifejtés. Ezt bemutatjuk a $\mathbf{H}$ mátrix példáján: a harmadik sort megszorozzuk 3-mal, és hozzáadjuk az első sorhoz – eközben a determináns nem változik:

$$\det \mathbf{H} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -10 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 18 & 19 \\ 2 & 5 & -10 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ezután a harmadik sort megszorozzuk 2-vel, és hozzáadjuk az második sorhoz – közben a determináns nem változik:

$$\det \mathbf{H} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 18 & 19 \\ 2 & 5 & -10 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 18 & 19 \\ 2 & 5 & -10 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 18 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Elértük, hogy az első oszlopban már két nulla van – még a harmadik sor kétszeresét a negyedik sorhoz is hozzáadjuk:

$$\det \mathbf{H} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 18 & 19 \\ 2 & 5 & -10 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 18 & 19 \\ 2 & 5 & -10 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 18 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -7 & 18 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 9 & 11 \end{vmatrix}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy az eredeti $\mathbf{H}$ mátrix determinánsa a következő:

$$\det \mathbf{H} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 18 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 9 & 11 \end{vmatrix}.$$

Ezt a determinánst kényelmesen kifejthetjük az első oszlopa szerint – a kifejtés csak egyetlen nullától különböző tagot tartalmaz:

$$\det \mathbf{H} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 18 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 9 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$0 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 12 \\ -2 & 5 & 5 \\ -2 & 9 & 11 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -7 & 18 & 19 \\ -2 & 5 & 5 \\ -2 & 9 & 11 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 18 & 19 \\ 1 & 0 & 12 \\ -2 & 9 & 11 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -7 & 18 & 19 \\ 1 & 0 & 12 \\ -2 & 5 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$(-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 18 & 19 \\ 1 & 0 & 12 \\ -2 & 9 & 11 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -7 & 18 & 19 \\ 1 & 0 & 12 \\ -2 & 9 & 11 \end{vmatrix}.$$

Ezt a determinánst ismét kifejtéssel számítjuk ki, de előzőleg elemi átalakításokat végzünk: a második sor 7-szeresét hozzáadjuk az első sorhoz:

$$\det \mathbf{H} = - \begin{vmatrix} -7 & 18 & 19 \\ 1 & 0 & 12 \\ -2 & 9 & 11 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 18 & 103 \\ 1 & 0 & 12 \\ -2 & 9 & 11 \end{vmatrix},$$

majd a a második sor 2-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\det \mathbf{H} = - \begin{vmatrix} -7 & 18 & 19 \\ 1 & 0 & 12 \\ -2 & 9 & 11 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 18 & 103 \\ 1 & 0 & 12 \\ -2 & 9 & 11 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 18 & 103 \\ 1 & 0 & 12 \\ 0 & 9 & 35 \end{vmatrix}.$$

Ez a determináns az első oszlop szerint könnyen kifejthető:

$$\det \mathbf{H} = - \begin{vmatrix} 0 & 18 & 103 \\ 1 & 0 & 12 \\ 0 & 9 & 35 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 18 & 103 \\ 9 & 35 \end{vmatrix} = 18 \cdot 35 - 9 \cdot 103 = -297.$$

A hosszú leírás alapján úgy tűnhet, hogy egy determináns kiszámítása bonyolult dolog, de nem ez a helyzet: ha megjegyezzük az alapszabályokat – amelyekből nem sok van –, akkor csak figyelmesen kell számolni, és némi rutint kell szerezni kitartó gyakorlással.

5. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) **CD**

Megoldás: A szorzat értelmezve van, mert **C** típusa 3×1, **D** típusa pedig 1×3, így a szorzat $(3 \times 1) \cdot (1 \times 3) = 3 \times 3$ típusú. Sor-oszlop kompozícióval kapjuk az eredményt:

$$\mathbf{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-2) & 4 \cdot 8 & 4 \cdot (-3) \\ (-5) \cdot (-2) & (-5) \cdot 8 & (-5) \cdot (-3) \\ 7 \cdot (-2) & 7 \cdot 8 & 7 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 32 & -12 \\ 10 & -40 & 15 \\ -14 & 56 & -21 \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathbf{DC}$

Megoldás: A szorzat értelmezve van, mert $\mathbf{D}$ típusa 1×3, $\mathbf{C}$ típusa pedig 3×1, így a szorzat $(1 \times 3) \cdot (3 \times 1) = 1 \times 1$ típusú, azaz egy szám. Sor-oszlop kompozícióval kapjuk az eredményt:

$$\mathbf{DC} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 4 + 8 \cdot (-5) + (-3) \cdot 7 = -69.$$

(c) $(2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}^T)^T$

Megoldás: A kompatibilitást könnyen ellenőrizhetjük. A rész-számítások:

$$2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -14 & -10 \\ -4 & 2 & 8 \\ 6 & 16 & 18 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 15 & -3 & 12 \\ -12 & -6 & 21 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 4 & -14 & -10 \\ -4 & 2 & 8 \\ 6 & 16 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & -3 & 12 \\ -12 & -6 & 21 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -11 & -22 \\ 8 & 8 & -13 \\ -3 & 10 & 15 \end{pmatrix},$$

$$(2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}^T)^T = \begin{pmatrix} -11 & 8 & -3 \\ -11 & 8 & 10 \\ -22 & -13 & 15 \end{pmatrix}.$$

(d) $\mathbf{A}^T\mathbf{C}$

Megoldás: Az $\mathbf{A}$ típusa 3×3, ugyanez az $\mathbf{A}^T$ típusa, a $\mathbf{C}$ típusa pedig 3×1, így a szorzat értelmezve van, és típusa $(3 \times 3) \cdot (3 \times 1) = 3 \times 1$. A szorzást sor-oszlop kompozícióval végezzük el:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -7 & 1 & 8 \\ -5 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + (-2) \cdot (-5) + 3 \cdot 7 \\ (-7) \cdot 4 + 1 \cdot (-5) + 8 \cdot 7 \\ (-5) \cdot 4 + 4 \cdot (-5) + 9 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 23 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

(e) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{D}$

Megoldás: A kompatibilitással gond van: $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ összeadható, mert mindegyik 3×3 típusú, s az összegük is ilyen, de $\mathbf{D}$ típusa 1×3, így balról nem szorozható $\mathbf{A} + \mathbf{B}$-vel.

(f) $(2\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{D}^T$

Megoldás: Ezúttal a kompatibilitás rendben van, mert $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ típusa 3×3, így $2\mathbf{A} - \mathbf{B}$ típusa ugyanennyi, továbbá $\mathbf{D}$ típusa 1×3, így $\mathbf{D}^T$ típusa 3×1, ami jobbról kompatibilis a 3×3 típussal: $(3 \times 3) \cdot (3 \times 1) = 3 \times 1$, ez lesz a szorzat típusa. A részletek:

$$2\mathbf{A} - \mathbf{B} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -14 & -10 \\ -4 & 2 & 8 \\ 6 & 16 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -10 & -13 \\ -3 & 4 & 6 \\ 2 & 9 & 17 \end{pmatrix},$$

és

$$\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix},$$

ezért

$$(2\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} -1 & -10 & -13 \\ -3 & 4 & 6 \\ 2 & 9 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-1)\cdot(-2) + (-10)\cdot 8 + (-13)\cdot(-3) \\ (-3)\cdot(-2) + 4\cdot 8 + 6\cdot(-3) \\ 2\cdot(-2) + 9\cdot 8 + 17\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

(g) $\mathbf{E}^2 - 4\mathbf{F}^T$

Megoldás: Az $\mathbf{E}$ mátrix 2×2 típusú, így négyzete értelmes, és ugyancsak 2×2 típusú, csakúgy, mint az $\mathbf{F}$, így $\mathbf{F}^T$ is, és $4\mathbf{F}^T$ is, tehát a kompatibilitás fennáll. A részletek:

$$\mathbf{E}^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -24 \\ 6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$4\mathbf{F}^T = 4 \cdot \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}^T = 4 \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -4 \\ 12 & 24 \end{pmatrix},$$

ezért

$$\mathbf{E}^2 - 4\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} 12 & -24 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -20 & -4 \\ 12 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & -20 \\ -6 & -24 \end{pmatrix}.$$

(h) $(\mathbf{E}^T - \mathbf{F})^2$

Megoldás: A szereplő mátrixok mindegyike 2×2 típusú, így a műveletek elvégezhetők, és az eredmény is 2×2 típusú mátrix lesz. A részletek:

$$\mathbf{E}^T = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}^T - \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix},$$

ezért

$$(\mathbf{E}^T - \mathbf{F})^2 = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 & -10 \\ -15 & 22 \end{pmatrix}.$$

(i) $\mathbf{B}^2\mathbf{D}^T + \mathbf{C}$

Megoldás: A $\mathbf{B}$ mátrix típusa 3×3, így négyzete értelmes, a $\mathbf{D}$ pedig 1×3 típusú, tehát $\mathbf{D}^T$ típusa 3×1, ami tehát balról megszorozható $\mathbf{B}^2$-el, s a szorzat típusa $(3\times 3)\cdot(3\times 1) = 3\times 1$, amihez hozzá lehet adni az ugyancsak 3×1 típusú $\mathbf{C}$ mátrixot. A részletes számítások:

$$\mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 9 & 10 \\ 5 & 22 & -5 \\ 17 & -23 & 27 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix}-2 & 8 & -3\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}-2\\8\\-3\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}^2\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix}41 & 9 & 10\\5 & 22 & -5\\17 & -23 & 27\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\8\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-40\\181\\-299\end{pmatrix},$$

s végül

$$\mathbf{B}^2\mathbf{D}^T + \mathbf{C} = \begin{pmatrix}-40\\181\\-299\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-5\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-36\\176\\-292\end{pmatrix}.$$

(j) $\det(\mathbf{E}^T + 2\mathbf{F})$

Megoldás: Kompatibilitási probléma nincs; minden fellépő mátrix 2×2 típusú. A részletek:

$$\mathbf{E}^T = \begin{pmatrix}4 & -4\\1 & 2\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}4 & 1\\-4 & 2\end{pmatrix},\quad 2\mathbf{F} = 2\cdot\begin{pmatrix}-5 & 3\\-1 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10 & 6\\-2 & 12\end{pmatrix},$$

ezért

$$\mathbf{E}^T + 2\mathbf{F} = \begin{pmatrix}4 & 1\\-4 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-10 & 6\\-2 & 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6 & 7\\-6 & 14\end{pmatrix},$$

s végül

$$\det(\mathbf{E}^T + 2\mathbf{F}) = \begin{vmatrix}-6 & 7\\-6 & 14\end{vmatrix} = (-6)\cdot14 - (-6)\cdot7 = -42.$$

(k) $\det(2\mathbf{E} - \mathbf{F}^2)$

Megoldás: Könnyű látni, hogy kompatibilitási probléma itt sincs; minden fellépő mátrix 2×2 típusú. A részletek:

$$2\mathbf{E} = 2\cdot\begin{pmatrix}4 & -4\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & -8\\2 & 4\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}^2 = \begin{pmatrix}-5 & 3\\-1 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 3\\-1 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}22 & 3\\-1 & 33\end{pmatrix},$$

ezért

$$2\mathbf{E} - \mathbf{F}^2 = \begin{pmatrix}8 & -8\\2 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}22 & 3\\-1 & 33\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14 & -11\\3 & -29\end{pmatrix},$$

és végül

$$\det(2\mathbf{E} - \mathbf{F}^2) = \begin{vmatrix}-14 & -11\\3 & -29\end{vmatrix} = (-14)\cdot(-29) - 3\cdot(-11) = 439.$$

(l) $\det(\mathbf{A}^T + 2\mathbf{B})$

Megoldás: Kompatibilitási probléma nincs: minden fellépő mátrix 3×3 típusú. A részletek:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix}2 & -7 & -5\\-2 & 1 & 4\\3 & 8 & 9\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\-7 & 1 & 8\\-5 & 4 & 9\end{pmatrix},\quad 2\mathbf{B} = 2\cdot\begin{pmatrix}5 & -4 & 3\\-1 & -2 & 2\\4 & 7 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & -8 & 6\\-2 & -4 & 4\\8 & 14 & 2\end{pmatrix},$$

ezért

$$\mathbf{A}^T + 2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -7 & 1 & 8 \\ -5 & 4 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -8 & 6 \\ -2 & -4 & 4 \\ 8 & 14 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -10 & 9 \\ -9 & -3 & 12 \\ 3 & 18 & 11 \end{pmatrix},$$

tehát

$$\det(\mathbf{A}^T + 2\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 12 & -10 & 9 \\ -9 & -3 & 12 \\ 3 & 18 & 11 \end{vmatrix}.$$

A determináns kiszámításához először elemi átalakításokat végzünk: a harmadik sor 4-szeresét kivonjuk az első sorból:

$$\det(\mathbf{A}^T + 2\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 12 & -10 & 9 \\ -9 & -3 & 12 \\ 3 & 18 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -82 & -35 \\ -9 & -3 & 12 \\ 3 & 18 & 11 \end{vmatrix}.$$

Ezután a harmadik sor 3-szorosát hozzáadjuk a második sorhoz:

$$\det(\mathbf{A}^T + 2\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 12 & -10 & 9 \\ -9 & -3 & 12 \\ 3 & 18 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -82 & -35 \\ -9 & -3 & 12 \\ 3 & 18 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -82 & -35 \\ 0 & 51 & 45 \\ 3 & 18 & 11 \end{vmatrix},$$

s ezt a determinánst az utolsó sora szerint kifejtjük:

$$\begin{vmatrix} 0 & -82 & -35 \\ 0 & 51 & 45 \\ 3 & 18 & 11 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -82 & -35 \\ 51 & 45 \end{vmatrix} = 3 \cdot ((-82) \cdot 45 - (51 \cdot (-35)) = -5715.$$

6. Legyen $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$. Határozza meg azt az $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre

   $2\mathbf{G} + \mathbf{X} = 5\mathbf{H}$!

   Megoldás: Az egyenletből:

$$\mathbf{X} = 5\mathbf{H} - 2\mathbf{G} = 5 \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 35 & -10 \\ 45 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 0 & 8 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 35 & -18 \\ 39 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Legyen $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -4 & 14 & -8 \\ 11 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -9 & 33 & 7 \\ 24 & -1 & -6 \end{pmatrix}$. Határozza meg azt az $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre

   $3\mathbf{N} + \mathbf{X} = -2\mathbf{M}$!

   Megoldás: Az egyenletből:

$$\mathbf{X} = -2\mathbf{M} - 3\mathbf{N} = -2 \begin{pmatrix} -4 & 14 & -8 \\ 11 & -2 & 5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -9 & 33 & 7 \\ 24 & -1 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -28 & 16 \\ -22 & 4 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -27 & 99 & 21 \\ 72 & -3 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -127 & -5 \\ -94 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

8. Oldja meg a $\begin{vmatrix} x & 2 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 10$ egyenletet!

Megoldás: A determináns kiszámításával az egyenlet

$$10 = \begin{vmatrix} x & 2 \\ -3 & x \end{vmatrix} = x \cdot x - (-3) \cdot 2 = x^2 + 6$$

alakú, tehát $x^2 = 4$, vagyis $x = \pm 2$. Visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy mindkét gyök megoldás.

9. Oldja meg a $\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{vmatrix} = 3x - 2$ egyenletet!

Megoldás: A determináns kiszámításával az egyenlet

$$3x - 2 = \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - x \cdot x = 2 - x^2$$

alakú, tehát $x^2 + 3x - 4 = 0$. Ebből a másodfokú egyenletből a gyökképlettel

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases} .$$

Visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy mindkét gyök megoldás.

10. Hogy kell megválasztani az x számot, hogy az $\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ -2 & 4 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ determináns értéke 0 legyen?

Megoldás: A determináns kiszámításához elemi átalakítást hajtunk végre: az első oszlop kétszeresét hozzádjuk a második oszlophoz:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ -2 & 4 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3+2x & -1 \\ -2 & 0 & x \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Most már a második oszlop szerint kényelmesen kifejthetjük a determinánst:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ -2 & 4 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3+2x & -1 \\ -2 & 0 & x \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3+2x) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & x \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-(3+2x)((-2) \cdot 1 - (-1) \cdot x) = -(3+2x)(-2+x).$$

A feltétel szerint ennek 0-nak kell lennie: egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0: ez azt jelenti, hogy $3 + 2x = 0$, azaz $x = -\frac{3}{2}$, vagy $-2 + x = 0$, azaz $x = 2$. Visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy mindkét gyök megoldás.

11. Hogy kell megválasztani az x számot, hogy az $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix}$ determináns értéke 0 legyen?

Megoldás: A determináns kiszámításához elemi átalakítást hajtunk végre: a a második sort kivonjuk a harmadikból:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 3 \\ x-2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Most már a harmadik sor szerint kényelmesen kifejthetjük a determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 3 \\ x-2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (x-2) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$(x-2)(2 \cdot 3 - 1 \cdot x) = (x-2)(6-x).$$

A feltétel szerint ennek 0-nak kell lennie: egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0: ez azt jelenti, hogy $x - 2 = 0$, azaz $x = 2$, vagy $6 - x = 0$, azaz $x = 6$. Visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy mindkét gyök megoldás.

12. Oldja meg a $\begin{vmatrix} x & 3 & x \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2x$ egyenletet!

Megoldás: A determináns kiszámításához az első oszlopot kivonjuk a harmadikból:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & x \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

ami már kényelmesen kifejthető az utolsó oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & x \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4(x \cdot 1 - 3 \cdot 3) = -4(x-9) = -4x + 36.$$

A feltétel szerint ez egyenlő $2x$-el, azaz $-4x + 36 = 2x$, vagyis $6x = 36$, $x = 6$. Visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ez valóban megoldás.

13. Oldja meg a $\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ -2 & 4 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3x$ egyenletet!

Megoldás: A determináns kiszámításához az első oszlop kétszeresét adjuk hozzá a másodikhoz:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ -2 & 4 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3+2x & -1 \\ -2 & 0 & x \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ami már kényelmesen kifejthető a második oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ -2 & 4 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3+2x & -1 \\ -2 & 0 & x \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3+2x) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & x \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(3+2x)((-2) \cdot 1 - (-1) \cdot x) = -(3+2x)(x-2).$$

A feltétel szerint ez egyenlő $-3x$-el, azaz $-(3+2x)(x-2) = -3x$, vagyis

$$2x^2 - x - 6 = 3x, \text{ azaz } 2x^2 - 4x - 6 = 0,$$

amiből a megoldóképlet alapján:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{4 \pm 8}{4} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} .$$

Visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ez valóban megoldás.

14. Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát!

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Megoldás: Elemi átalakításokat hajtunk végre: az utolsó sorban van egy -1, annak segítségével kinullázhatjuk a harmadik oszlop első három elemét. Először az utolsó sor 3-szorosát hozzáadjuk az első sorhoz:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & -11 & 0 & 7 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

majd az utolsó sor 2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 18 & -11 & 0 & 7 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & -11 & 0 & 7 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

végül az utolsó sor 3-szorosát kivonjuk a harmadik sorból:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 18 & -11 & 0 & 7 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & -11 & 0 & 7 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \\ -17 & 6 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

ami már kényelmesen kifejthető a harmadik oszlop szerint:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 18 & -11 & 0 & 7 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \\ -17 & 6 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 18 & -11 & 7 \\ 9 & 0 & 1 \\ -17 & 6 & 2 \end{vmatrix},$$

tehát

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 18 & -11 & 7 \\ 9 & 0 & 1 \\ -17 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ismét elemi átalakítást hajtunk végre: az utolsó oszlop 9-szeresét kivonjuk az első oszlopból:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 18 & -11 & 7 \\ 9 & 0 & 1 \\ -17 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -45 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -35 & 6 & 2 \end{vmatrix},$$

ezt pedig kifejtjük a második sor szerint:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -45 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -35 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -45 & -11 \\ -35 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$-((-45) \cdot 6 - (-35) \cdot (-11)) = -(-270 - 385) = 655.$$

(b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

Megoldás: Elemi átalakításokat hajtunk végre: az utolsó sorban van egy 1-es, annak segítségével kinullázhatjuk az első oszlop első három elemét. Először az utolsó sor 3-szorosát hozzáadjuk az első sorhoz:

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 19 & 20 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & 6 & 8 \end{vmatrix},$$

majd az utolsó sor 4-szeresét kivonjuk a második sorból:

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 19 & 20 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 19 & 20 \\ 0 & 13 & -22 & -34 \\ 3 & -3 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & 6 & 8 \end{vmatrix},$$

végül az utolsó sor 3-szorosát kivonjuk a harmadik sorból:

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 19 & 20 \\ 0 & 13 & -22 & -34 \\ 3 & -3 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 19 & 20 \\ 0 & 13 & -22 & -34 \\ 0 & 3 & -19 & -14 \\ 1 & -2 & 6 & 8 \end{vmatrix},$$

ami már kényelmesen kifejthető az első oszlop szerint:

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 19 & 20 \\ 0 & 13 & -22 & -34 \\ 0 & 3 & -19 & -14 \\ 1 & -2 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -4 & 19 & 20 \\ 13 & -22 & -34 \\ 3 & -19 & -14 \end{vmatrix},$$

tehát

$$\det \mathbf{B} = - \begin{vmatrix} -4 & 19 & 20 \\ 13 & -22 & -34 \\ 3 & -19 & -14 \end{vmatrix}.$$

Ismét elemi átalakítást hajtunk végre: hogy 1-est kapjuk valamelyik helyen, az utolsó sort hozzáadjuk az első sorhoz:

$$\det \mathbf{B} = -\begin{vmatrix} -4 & 19 & 20 \\ 13 & -22 & -34 \\ 3 & -19 & -14 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 13 & -22 & -34 \\ 3 & -19 & -14 \end{vmatrix},$$

majd az első sort 13-szorosát hozzáadjuk a második sorhoz, a 3-szorosát pedig a harmadik sorhoz – ezt egy lépésben fogjuk végrehajtani:

$$\det \mathbf{B} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 13 & -22 & -34 \\ 3 & -19 & -14 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & -22 & 44 \\ 0 & -19 & 4 \end{vmatrix},$$

amit az első oszlop szerint fejtünk ki:

$$\det \mathbf{B} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & -22 & 44 \\ 0 & -19 & 4 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -22 & 44 \\ -19 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$((-22) \cdot 4 - (-19) \cdot 44) = (-88 + 836) = 748.$$

15. Bizonyítsa be, hogy a $\underline{c}_1(1, -2)$ és $\underline{c}_2(4, 3)$ vektorok lineárisan függetlenek!

Megoldás: A két vektor lineáris függetlensége azt jelenti, hogy az

$$\alpha_1 \underline{c}_1 + \alpha_2 \underline{c}_2 = \underline{0}$$

vektoregyenlet egyetlen megoldása az $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. A vektorok koordinátás alakjával felírva a vektoregyenletet

$$\alpha_1 \cdot (1, -2) + \alpha_2 \cdot (4, 3) = (0, 0)$$

adódik. Másszóval,

$$(\alpha_1, -2\alpha_1) + (4\alpha_2, 3\alpha_2) = (\alpha_1 + 4\alpha_2, -2\alpha_1 + 3\alpha_2) = (0, 0).$$

Két vektor egyenlősége a megfelelő koordináták egyenlőségét jelenti, így a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Az első egyenlet 2-szeresét adjuk a másodikhoz, ekkor

$$11\alpha_2 = 0,$$

vagyis $\alpha_2 = 0$. Ezt az első egyenletbe visszahelyettesítve $\alpha_1 = 0$ adódik, amivel az állítást bebizonyítottuk: az egyenletrendszer csak $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ esetén teljesül.

16. Döntse el, hogy a $\underline{v}_1(1, 2, -3)$, $\underline{v}_2(-2, 2, 5)$ és $\underline{v}_3(8, -2, -21)$ vektorok lineárisan függetlenek-e!

Megoldás: A három vektor lineáris függetlensége azt jelenti, hogy az

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 = \underline{0}$$

vektoregyenlet egyetlen megoldása az $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. A vektorok koordinátás alakjával felírva a vektoregyenletet

$$\alpha_1 \cdot (1, 2, -3) + \alpha_2 \cdot (-2, 2, 5) + \alpha_3 \cdot (8, -2, -21) = (0, 0, 0)$$

adódik. Másszóval,

$$(\alpha_1, 2\alpha_1, -3\alpha_1) + (-2\alpha_2, 2\alpha_2, 5\alpha_2) + (8\alpha_3, -2\alpha_3, -21\alpha_3) =$$

$$(\alpha_1 - 2\alpha_2 + 8\alpha_3, 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3, -3\alpha_1 + 5\alpha_2 - 21\alpha_3) = (0, 0, 0).$$

Két vektor egyenlősége a megfelelő koordináták egyenlőségét jelenti, így a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 8\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 5\alpha_2 - 21\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Az első egyenlet 2-szeresét kivonjuk a második egyenletből, a 3-szorosát pedig hozzáadjuk a harmadik egyenlethez:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 8\alpha_3 &= 0 \\ 6\alpha_2 - 18\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Most a harmadik egyenlet 6-szorosát hozzáadjuk a második egyenlethez, a 2-szeresét pedig kivonjuk az első egyenletből:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenlet érdektelen, az elsőből $\alpha_1 = -2\alpha_3$, a harmadikból pedig $\alpha_2 = 3\alpha_3$ adódik. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges α_3 választással kapunk megoldást, pl. $\alpha_3 = 1$ esetén $\alpha_2 = 3$ és $\alpha_1 = -2$, vagyis létezik nem triviális megoldás: az adott vektorok lineárisan összefüggők.

17. Döntse el, hogy az $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $\underline{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek-e!

Megoldás: A három vektor lineáris függetlensége azt jelenti, hogy az

$$\alpha_1\underline{u}_1 + \alpha_2\underline{u}_2 + \alpha_3\underline{u}_3 = \underline{0}$$

vektoregyenlet egyetlen megoldása az $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. A vektorok koordinátás alakjával felírva a vektoregyenletet

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adódik. Másszóval,

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_1 \\ -4\alpha_1 \\ 5\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_2 \\ 4\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_3 \\ -\alpha_3 \\ 5\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ -4\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \\ 5\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Két vektor egyenlősége a megfelelő koordináták egyenlőségét jelenti, így a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ -4\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 5\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Az első egyenletet hozzádjuk a második egyenlethez, a 4-szeresét pedig kivonjuk a harmadik egyenletből:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ -2\alpha_1 - 2\alpha_3 &= 0 \\ -3\alpha_1 + 9\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $\alpha_1 = 3\alpha_3$, a másodikból pedig $\alpha_1 = -\alpha_3$, azaz $3\alpha_3 = -\alpha_3$, tehát $4\alpha_3 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Ezért $\alpha_1 = 0$, s végül az első egyenletből $\alpha_2 = 0$. Mivel csak triviális megoldás létezik, ezért az adott vektorok lineárisan függetlenek.

18. Előállítható-e a $\underline{c}$ vektor az $\underline{x}$, $\underline{y}$ vektorok lineáris kombinációjaként?

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: A kérdés az, hogy léteznek-e olyan α, β valós számok, hogy

$$\alpha\underline{x} + \beta\underline{y} = \underline{c}$$

teljesül. Koordinátás alakban:

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 23 \end{pmatrix},$$

vagyis

$$\begin{pmatrix} 3\alpha \\ -4\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta \\ 5\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha - \beta \\ -4\alpha + 5\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 23 \end{pmatrix},$$

tehát van-e α, β megoldása a

$$\begin{aligned} 3\alpha - \beta &= -9 \\ -4\alpha + 5\beta &= 23 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek? Az első egyenlet 5-szörösét adjuk a másodikhoz, akkor

$$\begin{aligned} 3\alpha - \beta &= -9 \\ 11\alpha &= -22 \end{aligned}$$

vagyis a második egyenletből $\alpha = -2$, majd visszahelyettesítéssel az első egyenletből $\beta = 3$ adódik. Ezért

$$-2\underline{x} + 3\underline{y} = \underline{c},$$

azaz, a $\underline{c}$ vektor előállítható az $\underline{x}$, $\underline{y}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

19. Előállítható-e az $\underline{x}(-7,5)$ vektor a $\underline{c}=(3,-2)$, $\underline{d}=(6,-4)$ vektorok lineáris kombinációjaként?

Megoldás: A kérdés az, hogy léteznek-e olyan α,β valós számok, hogy

$$\alpha\underline{c}+\beta\underline{d}=\underline{x}$$

teljesül. Koordinátás alakban:

$$\alpha(3,-2)+\beta(6,-4)=(-7,5)$$

vagyis

$$(3\alpha,-2\alpha)+(6\beta,-4\beta)=(3\alpha+6\beta,-2\alpha-4\beta)=(-7,5)$$

tehát van-e α,β megoldása a

$$\begin{aligned}3\alpha+6\beta &= -7\\ -2\alpha-4\beta &= 5\end{aligned}$$

egyenletrendszernek? Az első egyenlet 2-szeresét adjuk a második egyenlet 3-szorosához, akkor a

$$0=-14+15=1$$

egyenletet kapjuk, ami lehetetlen, azaz, az $\underline{x}$ vektor nem állítható elő a $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

20. Előállítható-e a $\underline{d}$ vektor az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként?

$$\underline{a}=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix},\quad \underline{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\\7\end{pmatrix},\quad \underline{c}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \underline{d}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-6\end{pmatrix}.$$

Megoldás: A kérdés az, hogy léteznek-e olyan α,β,γ valós számok, hogy

$$\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}+\gamma\underline{c}=\underline{d}$$

teljesül. Koordinátás alakban:

$$\alpha\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\2\\7\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-6\end{pmatrix}$$

vagyis

$$\begin{pmatrix}4\alpha\\-2\alpha\\3\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\beta\\2\beta\\7\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\gamma\\-2\gamma\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\alpha-\beta+2\gamma\\-2\alpha+2\beta-2\gamma\\3\alpha+7\beta+\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-6\end{pmatrix},$$

tehát van-e α,β megoldása a

$$\begin{aligned}4\alpha-\beta+2\gamma &= -1\\ -2\alpha+2\beta-2\gamma &= 4\\ 3\alpha+7\beta+\gamma &= -6\end{aligned}$$

egyenletrendszernek? Az első egyenlet 2-szeresét adjuk a második egyenlethez, a 7-szeresét pedig a harmadik egyenlethez, ekkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} 4\alpha - \beta + 2\gamma &= -1 \\ 6\alpha + 2\gamma &= 2 \\ 31\alpha + 15\gamma &= -13. \end{aligned}$$

A második egyeneletet osszuk el 2-vel:

$$\begin{aligned} 4\alpha - \beta + 2\gamma &= -1 \\ 3\alpha + \gamma &= 1 \\ 31\alpha + 15\gamma &= -13. \end{aligned}$$

Most a második egyenlet 15-szörösét vonjuk ki a harmadik egyenletből:

$$\begin{aligned} 4\alpha - \beta + 2\gamma &= -1 \\ 3\alpha + \gamma &= 1 \\ -14\alpha &= -28, \end{aligned}$$

tehát az utolsó egyenletből $\alpha = 2$, s visszahelyettesítéssel a második egyenletből $\gamma = -5$. Végül ezeket az első egyenletbe helyettesítve $\beta = -1$, tehát

$$2\underline{a} - \underline{b} - 5\underline{c} = \underline{d}$$

azaz, a $\underline{d}$ vektor előállítható az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

21. Előállítható-e az $\underline{d}$ vektor az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként?

$$\underline{a} = (1, 2, -3), \ \ \underline{b} = (-4, 2, 5), \ \ \underline{c} = (1, -1, 7), \ \ \underline{d} = (-7, 15, -23).$$

Megoldás: A kérdés az, hogy léteznek-e olyan α, β, γ valós számok, hogy

$$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} = \underline{d}$$

teljesül. Koordinátás alakban:

$$\alpha(1, 2, -3) + \beta(-4, 2, 5) + \gamma(1, -1, 7) = (-7, 15, -23),$$

vagyis

$$(\alpha, 2\alpha, -3\alpha) + (-4\beta, 2\beta, 5\beta) + (\gamma, -\gamma, 7\gamma) = (\alpha - 4\beta + \gamma, 2\alpha + 2\beta - \gamma, -3\alpha + 5\beta + 7\gamma) = (-7, 15, -23),$$

tehát van-e α, β, γ megoldása a

$$\begin{aligned} \alpha - 4\beta + \gamma &= -7 \\ 2\alpha + 2\beta - \gamma &= 15 \\ -3\alpha + 5\beta + 7\gamma &= -23 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek? Az első egyenlet 2-szeresét vonjuk ki a második egyenletből, illetve az első egyenlet 3-szorosát adjuk hozzá a harmadik egyenlethez, akkor az

$$\begin{aligned} \alpha - 4\beta + \gamma &= -7 \\ 10\beta - 3\gamma &= 29 \\ -7\beta + 10\gamma &= -44 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Most a második egyenlet 7-szeresét adjuk hozzá a harmadik egyenlet 10-szereséhez:

$$79\gamma = -237,$$

tehát $\gamma = -3$. Visszahelyettesítve a második egyenletbe $10\beta + 9 = 29$, vagyis $\beta = 2$. Végül visszahelyettesítve ezeket az első egyenletbe $\alpha = 4$ adódik. Ezért

$$4\underline{a} + 2\underline{b} - 3\underline{c} = \underline{d},$$

tehát a $\underline{d}$ vektor előállítható elő az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

22. A Gauss–eliminációt használva, egy egyenletrendszer megoldása során az alábbi mátrixot kaptuk. (Az ismeretlenek x_1, x_2, x_3.) Olvassa le a megoldás(oka)t!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -9 & -8 \\ 0 & -2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 30 \end{array}\right)$$

Megoldás: Az utolsó sorból $5x_3 = 30$, tehát $x_3 = 6$. A maśodik sorból $-2x_2 - 1 \cdot 6 = 10$, tehát $-2x_2 = 16$, $x_2 = -8$. Végül, az első sorból $3x_1 + (-8) - 9 \cdot 6 = -8$, tehát $3x_1 = 54$, vagyis $x_1 = 18$.

23. A Gauss–eliminációt használva, egy egyenletrendszer megoldása során az alábbi mátrixot kaptuk. (Az ismeretlenek x_1, x_2, x_3.) Olvassa le a megoldás(oka)t!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Megoldás: A mátrix alakja azt mutatja, hogy végtelen sok megoldás létezik. Ilyenkor az x_3 ismeretlen *szabad ismeretlennek* választható, legyen pl. $x_3 = t$. A másik két ismeretlent is t segítségével fejezzük ki. A második sorból $-3x_2 + 6 \cdot t = 0$, tehát $3x_2 = 6t$, $x_2 = 2t$. Végül, az első sorból $-x_1 + 3 \cdot 2t + 5 \cdot t = 6$, tehát $x_1 = 11t - 6$. Ez azt jelenti, hogy a t értékét (ami megegyezik az x_3 ismeretlennel) szabadon választva mindig pontosan egy megoldást kapunk x_1-re és x_2-re.

24. A Gauss–eliminációt használva, egy egyenletrendszer megoldása során az alábbi mátrixot kaptuk. (Az ismeretlenek x_1, x_2, x_3.) Olvassa le a megoldás(oka)t!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Megoldás: Az utolsó egyenlet azt jelenti, hogy $0 = -3$, ami lehetetlen, tehát nincs megoldás, az egyenletrendszer ellentmondásos.

25. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ 2x-y+z &= 2 \\ -x-y+z &= 1. \end{aligned}$$

Megoldás: Az első egyenletet hozzádjuk a harmadikhoz, illetve az első egyenlet 2-szeresét kivonjuk a másodikból:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ -3y-z &= -4 \\ 2z &= 4. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $z=2$, a másodikba visszahelyettesítve $-3y=-2$, vagyis $y=\frac{2}{3}$. Végül ezeket visszahelyettesítve az első egyenletbe $x+\frac{2}{3}+2=3$ adódik, azaz $x=\frac{1}{3}$. Tehát a megoldás:

$$x=\frac{1}{3},\ \ y=\frac{2}{3},\ \ z=2.$$

26. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x-y-z &= -1 \\ 3x+y-z &= 3 \\ x+3y+z &= 5. \end{aligned}$$

Megoldás: Az első egyenletet kivonjuk a harmadikból, illetve a 3-szorosát kivonjuk a másodikból:

$$\begin{aligned} x-y-z &= -1 \\ 4y+2z &= 6 \\ 4y+2z &= 6. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből kivonjuk a másodikat (csak a forma kedvéért!), a másodikat pedig elosztjuk 2-vel:

$$\begin{aligned} x-y-z &= -1 \\ 2y+z &= 3 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

ami azt mutatja, hogy végtelen sok megoldás van, melyeket paraméterezhetünk úgy, hogy a z ismeretlent szabad ismeretlennek választjuk: $z=t$, ekkor a második egyenletből $y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}t$, az elsőből pedig visszahelyettesítéssel $x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}t+t-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t$ adódik. Tehát a megoldás:

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t,\ \ y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}t,\ \ z=t.$$

27. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 2x+3y+2z &= 7 \\ x+y+z &= 3 \\ 2x+2y+3z &= 6. \end{aligned}$$

Megoldás: Bár eddig is a Gauss-elimináció lépéseit igyekeztünk követni, most formálisan is azt alkalmazzuk. Először felcseréljük az első két egyenletet, hogy az első az legyen, amelyben az x együtthatója 1 – ez csak kényelmi szempontból hasznos, egy ,,gép" nem vesztegetné ilyesmivel az időt:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ 2x+3y+2z &= 7 \\ 2x+2y+3z &= 6. \end{aligned}$$

A Gauss–elimináció mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right).$$

Az első sor 2-szeresét kivonjuk a másodikból és a harmadikból:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Ebből már leolvasható a megoldás: harmadik sorból $z=0$, a másodikból $y=1$, s az elsőből $x=3-y-z=2$. Tehát a megoldás:

$$x=2,\ \ y=1,\ \ z=0.$$

28. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 7x-2y+3z &= 8 \\ x-y+z &= 1 \\ 4x+6y-4z &= 3. \end{aligned}$$

Megoldás: A Gauss-elimináció lépéseit követjük. Először felcseréljük az első két egyenletet, hogy az első az legyen, amelyben az x együtthatója 1:

$$\begin{aligned} x-y+z &= 1 \\ 7x-2y+3z &= 8 \\ 4x+6y-4z &= 3. \end{aligned}$$

A Gauss–elimináció mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & -4 & 3 \end{array}\right).$$

Az első sor 7-szeresét kivonjuk a másodikból, a és a 4-szeresét harmadikból:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & -4 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 10 & -8 & -1 \end{array}\right).$$

Most a harmadik sorból kivonjuk a második sor 2-szeresét:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & -4 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 10 & -8 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Az utolsó egyenlet $0 = -3$, ami lehetetlen az ismeretlenek bármilyen választása mellett. Ezért az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása.

29. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 4 \\ -3x + 2y - z &= 6 \\ -6x + 5y + 5z &= 36. \end{aligned}$$

A Gauss-elimináció lépéseit követjük. Először elosztjuk az első két egyenletet 2-vel, hogy az x együtthatója 1 legyen:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z &= 2 \\ -3x + 2y - z &= 6 \\ -6x + 5y + 5z &= 36. \end{aligned}$$

A Gauss–elimináció mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 6 \\ -6 & 5 & 5 & 36 \end{array}\right).$$

Az első sor 3-szorosát hozzáadjuk a másodikhoz, a 6-szorosát pedig a harmadikhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 6 \\ -6 & 5 & 5 & 36 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 12 \\ 0 & 2 & 14 & 48 \end{array}\right)$$

Most a második egyenlet 4-szeresét kivonjuk a harmadikból, majd az első és második egyenleteket megszorozzuk 2-vel (ennek csak az a célja, hogy megszabaduljunk a törtektől):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 6 \\ -6 & 5 & 5 & 36 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 12 \\ 0 & 2 & 14 & 48 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

ami azt mutatja, hogy végtelen sok megoldás van, melyeket paraméterezhetünk úgy, hogy a z ismeretlent szabad ismeretlennek választjuk: $z = t$, ekkor a második egyenletből $y = 24 - 7t$, az elsőből pedig visszahelyettesítéssel $2x = 4 - 3t + 24 - 7t = 28 - 10t$, vagyis $x = 14 - 5t$ adódik. Tehát a megoldás:

$$x = 14 - 5t, \;\; y = 24 - 7t, \;\; z = t.$$

30. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x+2y-z &= 2 \\ 2x+y &= 3 \\ -x+y+2z &= 4. \end{aligned}$$

Megoldás: A Gauss–elimináció mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Az első sort hozzáadjuk a harmadikhoz, illetve a 2-szeresét kivonjuk a másodikból:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right).$$

Most a második egyenletet hozzáadjuk a harmadikhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{array}\right).$$

A harmadik egyenlet azt mutatja, hogy $z = \frac{5}{3}$. A másodikba visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy $y = \frac{1}{3}(-1 - 2 \cdot \frac{5}{3}) = \frac{13}{9}$. Végül az első egyenletből: $x = 2 - 2 \cdot \frac{13}{9} + \frac{5}{3} = \frac{7}{9}$. Tehát a megoldás:

$$x = \frac{7}{9}, \;\; y = \frac{13}{9}, \;\; z = \frac{5}{3}.$$

31. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x+y-2z+4v &= 4 \\ -x-4y+z+2v &= -2 \\ 2x-3y+z-v &= -1 \\ 4x-y+z+v &= 5. \end{aligned}$$

Megoldás: A Gauss–elimináció mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 4 \\ -1 & -4 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Az első sort hozzáadjuk a másodikhoz, a 2-szeresét kivonjuk a harmadikból, és a 4-szeresét kivonjuk a negyedikből:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 4 \\ -1 & -4 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -9 & -9 \\ 0 & -5 & 9 & -15 & -11 \end{array}\right).$$

Most felcseréljük a második és harmadik oszlopot – ennek az az értelme, hogy a második sorban -1 lesz az első nem nulla elem. Ne felejtsük el, hogy ezáltal **felcseréltük** az y és z ismeretleneket:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -9 & -9 \\ 0 & -5 & 9 & -15 & -11 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & -9 & -9 \\ 0 & 9 & -5 & -15 & -11 \end{array}\right).$$

Most a második sor 5-szörösét hozzáadjuk a harmadikhoz, a 9-szeresét pedig a negyedikhez:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & -9 & -9 \\ 0 & 9 & -5 & -15 & -11 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & 21 & 1 \\ 0 & 0 & -32 & 39 & 7 \end{array}\right).$$

Most a harmadik sort megszorozzuk 8-cal, a negyediket pedig -5-tel:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & 21 & 1 \\ 0 & 0 & -32 & 39 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -160 & 168 & 8 \\ 0 & 0 & 160 & -195 & -35 \end{array}\right).$$

Végül harmadik sort hozzáadjuk a negyedikhez:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -160 & 168 & 8 \\ 0 & 0 & 160 & -195 & -35 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -160 & 168 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -27 & -27 \end{array}\right).$$

Az utolsó sor azt mutatja, hogy $v = 1$. Visszahelyettesítve a harmadik egyenletbe: $-160y+168 = 8$ (**felcseréltük** y-t és z-t, ezért a harmadik oszlop az y oszlopa!), így $-160y = -160$, tehát $y = 1$. Visszahelyettesítve a második sorba: $-z - 3 + 6 = 2$, vagyis $-z = -1$, $z = 1$. Végül az első sorból azt kapjuk, hogy $x - 2 + 1 + 4 = 4$, azaz $x = 1$. Tehát a megoldás:

$$x = 1, \;\; y = 1, \;\; z = 1, \;\; v = 1.$$

32. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x - y - 3z + 4v &= 2 \\ 2x + y + z - 5v &= -7 \\ x + y + z + 2v &= 6 \\ 3x - 4y - 2z + v &= 7. \end{aligned}$$

Megoldás: A Gauss–elimináció mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & -4 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right).$$

Az első sor -2-szeresét hozzáadjuk a másodikhoz, a -1-szeresét a harmadikhoz, és -3-szorosát a negyedikhez:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & -4 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -13 & -11 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 7 & -11 & 1 \end{array}\right).$$

Most felcseréljük a második és negyedik sort – ennek az az értelme, hogy a második sorban -1 lesz az első nem nulla elem:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & -4 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -13 & -11 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 7 & -11 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -11 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & -13 & -11 \end{array}\right).$$

Most a második sor 2-szeresét hozzáadjuk a harmadikhoz, a 3-szorosát pedig a negyedikhez:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -11 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & -13 & -11 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & -24 & 6 \\ 0 & 0 & 28 & -46 & -8 \end{array}\right).$$

Most a harmadik sort megszorozzuk 14-gyel, a negyediket pedig -9-cel – ezzel az a cél, hogy a 18 és a 28 legkisebb közös többszörösét, 252-t kapjunk, pozitív, illetve negatív előjellel, ezzel elkerülhetjük, hogy kellemetlen törtekkel kelljen számolgatni:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & -24 & 6 \\ 0 & 0 & 28 & -46 & -8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 252 & -336 & 84 \\ 0 & 0 & -252 & 414 & 72 \end{array}\right).$$

Végül harmadik sort hozzáadjuk a negyedikhez:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 252 & -336 & 84 \\ 0 & 0 & -252 & 414 & 72 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 252 & -336 & 84 \\ 0 & 0 & 0 & 78 & 156 \end{array}\right).$$

Az utolsó sor azt mutatja, hogy $78v = 156$, vagyis $v = 2$. Visszahelyettesítve a harmadik egyenletbe: $252z-336\cdot 2 = 84$, így $252z = 756$, tehát $z = 3$. Visszahelyettesítve a második sorba: $-y+7\cdot 3-11\cdot 2 = 1$, vagyis $y = -2$. Végül az első sorból azt kapjuk, hogy $x-(-2)-3\cdot 3+4\cdot 2 = 2$, azaz $x = 1$. Tehát a megoldás:

$$x = 1, \quad y = -2, \quad z = 3, \quad v = 2.$$

33. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 - 11x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Megoldás: A Gauss–elimináció mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -5 & -11 & 1 \end{array}\right).$$

Az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a másodikhoz, a 2-szeresét a harmadikhoz, és magát a sort a negyedikhez:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -5 & -11 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & -10 & -16 & 5 \\ 0 & 7 & 9 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}\right).$$

Most felcseréljük a második és negyedik sort – ennek az az értelme, hogy a második sorban 1 lesz az első nem nulla elem:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -5 & -11 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & -10 & -16 & 5 \\ 0 & 7 & 9 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & 10 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & -16 & 5 \end{array}\right).$$

Most a második sor -7-szeresét hozzáadjuk a harmadikhoz, a 6-szorosát pedig a negyedikhez:

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & 10 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & -16 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 52 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & -52 & 5 \end{array}\right).$$

Most a harmadik sort hozzáadjuk a negyedikhez:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 52 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & -52 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 52 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

Az utolsó sor szerint $0 = 6$, ami lehetetlen, így az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldás.

34. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -20 \\ 2x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= -2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= -11 \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 13. \end{aligned}$$

Megoldás: A Gauss–elimináció mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 4 & -20 \\ 2 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 5 & -11 \\ 4 & 3 & 0 & -3 & 13 \end{array}\right).$$

Először felcseréljük az első két oszlopot – ezzel az x_1 és x_2 ismeretleneket is felcseréltük! A cél az, hogy az első sor első eleme 1 legyen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 4 & -20 \\ 2 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 5 & -11 \\ 4 & 3 & 0 & -3 & 13 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & -20 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 5 & -11 \\ 3 & 4 & 0 & -3 & 13 \end{array}\right).$$

Az első sort hozzáadjuk a harmadikhoz, a 3-szorosát pedig a negyedikhez:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 4 & -20 \\ 2 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 5 & -11 \\ 4 & 3 & 0 & -3 & 13 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & -20 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 5 & -11 \\ 3 & 4 & 0 & -3 & 13 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & -20 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 9 & -31 \\ 0 & 13 & 9 & 9 & -47 \end{array}\right).$$

Most felcseréljük a második és harmadik sort – ennek az az értelme, hogy a második sorban 1 lesz az első nem nulla elem:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & -20 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 9 & -31 \\ 0 & 13 & 9 & 9 & -47 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & -20 \\ 0 & 1 & 5 & 9 & -31 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 13 & 9 & 9 & 47 \end{array}\right).$$

Most a második sor -2-szeresét hozzáadjuk a harmadikhoz, a -13-szorosát pedig a negyedikhez:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & -20 \\ 0 & 1 & 5 & 9 & -31 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 13 & 9 & 9 & -47 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & -20 \\ 0 & 1 & 5 & 9 & -31 \\ 0 & 0 & -12 & -15 & 60 \\ 0 & 0 & -56 & -108 & 356 \end{array}\right).$$

Most a harmadik sort megszorozzuk 14-gyel, a negyediket pedig -3-mal, hogy a 12 és 56 legkisebb közös többszörösét, 168-at kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & -20 \\ 0 & 1 & 5 & 9 & -31 \\ 0 & 0 & -12 & -15 & 60 \\ 0 & 0 & -56 & -108 & 356 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & -20 \\ 0 & 1 & 5 & 9 & -31 \\ 0 & 0 & -168 & -210 & 840 \\ 0 & 0 & 168 & 324 & -1068 \end{array}\right)$$

Most a harmadik sort hozzáadjuk a negyedikhez:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & -20 \\ 0 & 1 & 5 & 9 & -31 \\ 0 & 0 & -168 & -210 & 840 \\ 0 & 0 & 168 & 324 & 1068 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 3 & 4 & -20 \\ 0 & 1 & 5 & 9 & -31 \\ 0 & 0 & -168 & -210 & 840 \\ 0 & 0 & 0 & 114 & -228 \end{array}\right).$$

Az utolsó sorból $x_4 = -2$, ezt a harmadikba helyettesítve $-168x_3 + 420 = 840$, amiből $x_3 = -\frac{5}{2}$. Ezeket a másodikba helyettesítve $x_1 = -31 - 5 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - 9 \cdot (-2) = -\frac{1}{2}$. Végül, mindezeket az első sorba visszahelyettesítve $x_2 = 3$ adódik. Tehát a megoldás:

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \;\; x_2 = 3, \;\; x_3 = -\frac{5}{2}, \;\; x_4 = -2.$$

35. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_4 &= -3\\
2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= -1\\
2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 4\\
-x_1 + x_3 + 2x_4 &= -2.
\end{aligned}$$

Megoldás: A Gauss–elimináció mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -3\\ 2 & 3 & -1 & 4 & -1\\ 2 & 1 & -2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Az első sort hozzáadjuk a negyedikhez, a -2-szeresét pedig a másodikhoz és a harmadikhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -3\\ 2 & 3 & -1 & 4 & -1\\ 2 & 1 & -2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -3\\ 0 & -1 & -1 & 6 & 5\\ 0 & -3 & -2 & 5 & 10\\ 0 & 2 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right).$$

Most a második sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadikhoz, a 2-szeresét pedig a negyedikhez:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -3\\ 0 & -1 & -1 & 6 & 5\\ 0 & -3 & -2 & 5 & 10\\ 0 & 2 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -3\\ 0 & -1 & -1 & 6 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -13 & -5\\ 0 & 0 & -1 & 13 & 5 \end{array}\right).$$

Most a harmadik sort hozzádjuk a negyedikhez:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -3\\ 0 & -1 & -1 & 6 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -13 & -5\\ 0 & 0 & -1 & 13 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & -3\\ 0 & -1 & -1 & 6 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -13 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ebből azt látjuk, hogy az x_4 ismeretlen szabad ismeretlennek választható: $x_4 = t$. A harmadik sorból $x_3 - 13t = -5$, azaz $x_3 = -5 + 13t$. Visszahelyettesítve a második sorba azt kapjuk, hogy $-x_2 - (-5 + 13t) + 6t = 5$, azaz $x_2 = 7t$. Végül az első sorból $x_1 + 2 \cdot (-7t) - t = -3$, azaz $x_1 = -3 + 15t$. Tehát a megoldás:

$$x_1 = -3 + 15t,\ \ x_2 = 7t,\ \ x_3 = -5 + 13t,\ \ x_4 = t.$$

36. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 19\\
-2x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 &= 9,5\\
3x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 21\\
2x_1 - 4x_3 + 3x_4 &= 5.
\end{aligned}$$

Megoldás: A második egyenletet beszorozzuk 2-vel, hogy egész számokkal dolgozhassunk, amíg lehetséges. Ezután a Gauss–elimináció mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 & 19 \\ -4 & 12 & -2 & 10 & 19 \\ 3 & 4 & -3 & 0 & 21 \\ 2 & 0 & -4 & 3 & 5 \end{array}\right).$$

Az első sor 4-szeresét hozzáadjuk a másodikhoz, a -3-szorosát a harmadikhoz, a -2-szeresét pedig a negyedikhez:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 & 19 \\ -4 & 12 & -2 & 10 & 19 \\ 3 & 4 & -3 & 0 & 21 \\ 2 & 0 & -4 & 3 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 & 19 \\ 0 & 28 & -22 & 22 & 95 \\ 0 & -8 & 12 & -9 & -36 \\ 0 & -8 & 6 & -3 & -33 \end{array}\right).$$

Most a második sort megszorozzuk 2-vel, hogy 28 helyett 56 legyen az első elem, ami egész többszöröse a harmadik és negyedik sorok első elemének, továbbá a harmadik és negyedik sort megszorozzuk 7-tel::

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 & 19 \\ 0 & 28 & -22 & 22 & 95 \\ 0 & -8 & 12 & -9 & -36 \\ 0 & -8 & 6 & -3 & -33 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 & 19 \\ 0 & 56 & -44 & 44 & 190 \\ 0 & -56 & 84 & -63 & -252 \\ 0 & -56 & 42 & -21 & -231 \end{array}\right).$$

Most a második sort hozzádjuk a harmadikhoz és a negyedikhez:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 & 19 \\ 0 & 56 & -44 & 44 & 190 \\ 0 & -56 & 84 & -63 & -252 \\ 0 & -56 & 42 & -21 & -231 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 & 19 \\ 0 & 56 & -44 & 44 & 190 \\ 0 & 0 & 40 & -19 & -62 \\ 0 & 0 & -2 & 23 & -41 \end{array}\right).$$

A második sort 2-vel elosztjuk, hogy kisebb számokkal kelljen számolni, valamint az utolsó két sort felcseréljük:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 & 19 \\ 0 & 56 & -44 & 44 & 190 \\ 0 & -56 & 84 & -63 & -252 \\ 0 & -56 & 42 & -21 & -231 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 & 19 \\ 0 & 28 & -22 & 22 & 95 \\ 0 & 0 & -2 & 23 & -41 \\ 0 & 0 & 40 & -19 & -62 \end{array}\right).$$

Most a harmadik sor 20-szorosát hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 & 19 \\ 0 & 28 & -22 & 22 & 95 \\ 0 & 0 & -2 & 23 & -41 \\ 0 & 0 & 40 & -19 & -62 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -5 & 3 & 19 \\ 0 & 28 & -22 & 22 & 95 \\ 0 & 0 & -2 & 23 & -41 \\ 0 & 0 & 0 & 441 & -882 \end{array}\right).$$

Az utolsó sorból $x_4 = -2$. A harmadik sorból $-2x_3 + 23 \cdot (-2) = -41$, tehát $x_3 = -\frac{5}{2}$. Ezt a második sorba helyettesítve $x_2 = 3$ addódik, végül az első sort felhasználva $x_1 = \frac{1}{2}$. Tehát a megoldás:

$$x_1 = \frac{1}{2},\ \ x_2 = 3,\ \ x_3 = -\frac{5}{2},\ \ x_4 = -2.$$

37. Döntse el, hogy létezik-e inverze az alábbi mátrixoknak!

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: Inverze csak négyzetes mátrixnak létezik, pontosan akkor, ha a determinánsa 0-tól különböző. Esetünkben az $\mathbf{A}$ matrix determinánsát kifejtéssel határozzuk meg, de előbb a második sor 2-szeresét kivonjuk az elsőből, a 3-szorosát pedig a harmadikból – ezekkel az elemi átalakításokkal a determináns értéke nem változik:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ezután a determinánst az első oszlop szerint kifejtjük:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -((-8) \cdot 1 - (-2) \cdot 5) = -2 \neq 0.$$

Tehát az $\mathbf{A}$ mátrixnak létezik az inverze.

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 8 & 0 & 5 \\ 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: A $\mathbf{B}$ matrix determinánsát kifejtéssel határozzuk meg, de előbb az első sor 4-szeresét kivonjuk a másodikból, az 5-szörösét pedig a harmadikból – ezekkel az elemi átalakításokkal a determináns értéke nem változik:

$$\det \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 8 & 0 & 5 \\ 10 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -12 & 13 \\ 0 & -12 & 13 \end{vmatrix}.$$

Ha egy determinánsban két sor (vagy oszlop) megegyezik, akkor az értéke 0. Tehát a $\mathbf{B}$ mátrixnak nem létezik az inverze.

38. Milyen x értékek esetén nincs inverze az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrixnak?

Megoldás: Az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa a második sor szerinti kifejtéssel:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) \cdot (2x - 1) = 7 - 8x.$$

A determináns $7 - 8x = 0$ esetén, azaz $x = \frac{7}{8}$ mellett 0, tehát az $\mathbf{A}$ mátrixnak pontosan ekkor nincs inverze.

39. Milyen x értékek esetén nincs inverze az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

mátrixnak?

Megoldás: Az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa a második sor szerinti kifejtéssel:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 20 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot (20 - 4x) = 8x - 40.$$

A determináns $8x - 40 = 0$ esetén, azaz $x = 5$ mellett 0, tehát az $\mathbf{A}$ mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $x \neq 5$.

40. Milyen x értékek esetén nincs inverze az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

mátrixnak?

Megoldás: Az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa a második sor szerinti kifejtéssel:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 20 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot (20 - 4x) = 8x - 40.$$

A determináns $8x - 40 = 0$ esetén, azaz $x = 5$ mellett 0, tehát az $\mathbf{A}$ mátrixnak pontosan akkor van inverze, ha $x \neq 5$.

41. Igazolja, hogy a mátrixnak létezik inverze, és határozza meg az inverz mátrixot!

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A mátrix determinánsa:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 9 - 8 = 1,$$

tehát az inverz mátrix létezik. Az inverz mátrixot úgy kapjuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix minden eleme helyére beírjuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánst, az így kapott mátrixot transzponáljuk, végül elosztjuk az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsával. Esetünkben:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A mátrix inverzét a Gauss–Jordan eliminációval is meghatározhatjuk. Ez a következő módosítása a Gauss–eliminációnak: lényegében egyidejűleg több egyenletrendszert oldunk meg Gauss–eliminációval, melyeknek csak a jobboldalai különböznek, mégpedig a jobboldalak az megfelelő rendű egységmátrix oszlopai. Ezt a következő módon írjuk fel:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

tehát a $\mathbf{B}$ mellé, az elválasztó vonal jobboldalára a 2×2 típusú egységmátrix kerül. Ezután a Gauss–eliminációt hajtjuk végre, de az általában szokásos, egyetlen jobboldali oszlopvektor helyett most az egységmátrix minden oszlopvektorán végrehajtjuk ugyanazokat az átalakításokat. Ezt addig folytatjuk, amíg az elválasztó vonal baloldalán az egységmátrix jelenik meg, ekkor a vonal jobboldalán a $\mathbf{B}$ inverzét kapjuk. Tehát a Gauss–elimináció lépései során arra kell törekednünk, hogy a baloldalon az egységmátrix jelenjen meg.

Mivel $\det \mathbf{B} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3$, ezért a $\mathbf{B}$ mátrixnak létezik az inverze. Visszatérve a Gauss–Jordan–elimináció mátrixához, először adjuk hozzá az első sort a másodikhoz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Most osszuk el a második sort 3-mal:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Végül vonjuk ki a második sor 2-szeresét az elsőből:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Mivel az elválasztó vonal baloldalán megjelent az egységmátrix, így a jobboldalán a $\mathbf{B}$ mátrix inverze áll:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A mátrix inverzét a Gauss–Jordan eliminációval határozzuk meg. Megjegyezzük, hogy ilyenkor nem szükséges a determinánst vizsgálni: ha a determináns 0, tehát nem létezik az inverz, akkor a Gauss–Jordan elimináció során nem jelenik meg a baloldalon az egységmátrix. Persze, esetleg hosszas, hiábavaló számításokat spórolhatunk meg, ha először kiszámítjuk a determinánst... Ezt a következő feladatokban – gyakorlásképpen – rábízzuk az olvasóra.

A Gauss–Jordan elimináció mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Először cseréljük fel az első két sort:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

majd szorozzuk meg az első sort -1-el, hiszen a baloldalon az egységmátrixot akarjuk megkapni:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Vonjuk ki az első sor 2-szeresét a másodikból, a 3-szorosát pedig a harmadikból:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Cseréljük fel a második és harmadik sort:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Adjuk hozzá a harmadik sort az elsőhöz és vonjuk ki a másodikból:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Adjuk hozzá a második sort az elsőhöz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Végül szorozzuk meg a második sort -1-el:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Mivel az elválasztó vonal baloldalán megjelent az egységmátrix, így a jobboldalán a $\mathbf{C}$ mátrix inverze áll:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A mátrix determinánsa $-6 \neq 0$, tehát az inverz létezik, melyet Gauss–Jordan eliminációval határozunk meg.

A Gauss–Jordan elimináció mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Vonjuk ki az első sort a harmadikból:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Vonjuk ki a második sort a harmadikból:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Szorozzuk meg a harmadik sort $-\frac{1}{3}$-dal:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Vonjuk ki a harmadik sor 2-szeresét a másodikból:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Adjuk hozzá a harmadik sort az elsőhöz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Végül osszuk el az első sort 2-vel:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Mivel az elválasztó vonal baloldalán megjelent az egységmátrix, így a jobboldalán a $\mathbf{D}$ mátrix inverze áll:

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(e)

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 6 & -8 & 15 \\ 10 & -15 & 34 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A mátrix determinánsa $2 \neq 0$, tehát az inverz létezik, melyet Gauss–Jordan eliminációval határozunk meg.

A Gauss–Jordan elimináció mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & 15 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & -15 & 34 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Adjuk hozzá az első sor 3-szorosát a másodikhoz, az 5-szörösét pedig a harmadikhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & 15 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & -15 & 34 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Az első és harmadik sort szorozzuk be -1-el:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

A harmadik sor -7-szeresét adjuk az elsőhöz, a 6-szorosát pedig a másodikhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 0 & 34 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -27 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Adjuk a második sor 3-szorosát az elsőhöz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 0 & 34 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -27 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -47 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -27 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Végül osszuk el az első sort 2-vel:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -47 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -27 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{47}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -27 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Mivel az elválasztó vonal baloldalán megjelent az egységmátrix, így a jobboldalán a $\mathbf{E}$ mátrix inverze áll:

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{47}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ -27 & 1 & -6 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(f)

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A mátrix determinánsa $2 \neq 0$, tehát az inverz létezik, melyet Gauss–Jordan eliminációval határozunk meg.

A Gauss–Jordan elimináció mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

A második sort szorozzuk be 2-vel:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Az első sor 3-szorosát vonjuk ki a másodikból, a 2-szeresét pedig a harmadikból:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

A harmadik sort szorozzuk be 3-mal:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

A második sort vonjuk ki a harmadikból:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

A második sort szorozzuk be 2-vel:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

A harmadik sort vonjuk ki a másodikból:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

A második sort osszuk el 6-tal, a harmadikat pedig 2-vel:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{array}\right).$$

A második és harmadik sort vonjuk ki az elsőből:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2}\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2}\end{array}\right).$$

Végül az első sort osszuk el 2-vel:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2}\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2}\end{array}\right).$$

Mivel az elválasztó vonal baloldalán megjelent az egységmátrix, így a jobboldalán a **F** mátrix inverze áll:

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

(g)

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & -4 & -3\end{pmatrix}$$

Megoldás: A mátrix determinánsa $-36 \neq 0$, tehát az inverz létezik, melyet Gauss–Jordan eliminációval határozunk meg.

A Gauss–Jordan elimináció mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Az első sor 2-szeresét vonjuk ki a másodikból, a 3-szorosát pedig a harmadikból:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -6 & -3 & 0 & 1\end{array}\right).$$

A harmadik sort szorozzuk meg 3-mal:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -6 & -3 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 6 & -18 & -9 & 0 & 3\end{array}\right).$$

A második sort vonjuk ki a harmadikból:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 6 & -18 & -9 & 0 & 3\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -18 & -7 & -1 & 3\end{array}\right).$$

Az első sort beszorozzuk 3-mal, és hozzáadjuk a másodikat:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -18 & -7 & -1 & 3\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -18 & -7 & -1 & 3\end{array}\right).$$

Az első sort szorozzuk be 6-tal és adjuk hozzá a harmadikat:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & -7 & -1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 18 & 0 & 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & -7 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Végül az első, illetve a harmadik sort osszuk el 18-cal, illetve -18-cal, a második sort pedig 6-tal:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 18 & 0 & 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & -7 & -1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} \end{array}\right).$$

Mivel az elválasztó vonal baloldalán megjelent az egységmátrix, így a jobboldalán a $\mathbf{G}$ mátrix inverze áll:

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$