Improprius integrál

1) $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{2}{x^4}\,dx$

Megoldás: Az improprius integrál kiszámítása a közönséges határozott integrál kiszámításához hasonlóan történik. Először a $+\infty$, illetve $-\infty$ határokat tetszőleges, de változó véges határral helyettesítjük (pl. a-val, b-vel, stb.), kiszámítjuk az integrált a határozatlan integrál módszerei segítségével primitív függvényt keresünk, majd a véges határral az illető végtelenhez tartva kiszámítjuk a határértéket. Amennyiben véges határérték létezik, akkor az improprius integrált konvergensnek nevezzük, ellenkező esetben, tehát ha a határérték nem létezik, vagy $\pm\infty$, akkor divergensnek.

Esetünkben a függvény nincs értelmezve 0-ban, de ez a pont kívül esik az integrációs intervallumon, úgyhogy nincs vele dolgunk. A felső határt véges, b értékkel helyettesítjük, kiszámítjuk az integrált a véges $[3, b]$ intervallumon, majd elvégezzük a $b \to +\infty$ határátmenetet:

$$\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{2}{x^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{3}^{b} \frac{2}{x^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{3}^{b} 2x^{-4}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{2x^{-3}}{-3}\right]_3^b =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \left[\left(-\frac{2}{3b^3}\right) - \left(-\frac{2}{3\cdot 3^3}\right)\right] = \frac{2}{81} - \lim_{b\to+\infty} \frac{2}{3b^3} = \frac{2}{81},$$

hiszen a

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{2}{3b^3} = \frac{2}{3} \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{b^3}$$

hataérérték nyilván 0. Tehát az improprius integrál konvergens, és

$$\int\limits_{3}^{\infty} \frac{2}{x^4}\,dx = \frac{2}{81}.$$

2) $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{3}{4x^2}\,dx$

Megoldás: A függvény nincs értelmezve 0-ban, de ez a pont kívül esik az integrációs intervallumon, úgyhogy nincs vele dolgunk. A fentiekhez hasonlóan:

$$\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{3}{4x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{-3} \frac{3}{4x^2}\,dx = \int\limits_{a}^{-3} \frac{3x^{-2}}{4}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{3x^{-1}}{4\cdot(-1)}\right]_a^{-3} =$$

$$\lim_{a\to-\infty} \left[\left(-\frac{3}{4\cdot(-3)}\right) - \left(-\frac{3}{4\cdot a}\right)\right] = \frac{1}{4} + \lim_{a\to-\infty} \frac{3}{4a} = \frac{1}{4},$$

Tehát az improprius integrál konvergens, és

$$\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{3}{4x^2}\,dx = \frac{1}{4}.$$

3) $\int\limits_{5}^{+\infty} \frac{3}{7x^3}\,dx$

Megoldás: A függvény nincs értelmezve 0-ban, de ez a pont kívül esik az integrációs intervallumon, úgyhogy nincs vele dolgunk. A fentiekhez hasonlóan:

$$\int\limits_{5}^{+\infty} \frac{3}{7x^3}\,dx = \lim_{5\to b} \int\limits_{5}^{b} \frac{3}{7x^3}\,dx = \int\limits_{5}^{b} \frac{3x^{-3}}{7}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{3x^{-2}}{7\cdot(-2)}\right]_5^b =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \left[\left(-\frac{3}{14\cdot b^2}\right) - \left(-\frac{3}{14\cdot 5^2}\right)\right] = \frac{3}{350} - \lim_{b\to+\infty} \frac{3}{14b^2} = \frac{3}{350}.$$

Tehát az improprius integrál konvergens, és

$$\int\limits_{5}^{+\infty} \frac{3}{7x^3}\,dx = \frac{3}{350}.$$

4) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{6}{5\sqrt[3]{x}}\,dx$

Megoldás: A függvény nincs értelmezve 0-ban, de ez a pont kívül esik az integrációs intervallumon, úgyhogy nincs vele dolgunk. A fentiekhez hasonlóan:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{6}{5\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{6x^{-\frac{1}{3}}}{5}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{6x^{\frac{2}{3}}}{5\cdot\frac{2}{3}}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{18x^{\frac{2}{3}}}{10}\right]_1^b =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \left[\left(\frac{9}{5}\cdot b^{\frac{2}{3}}\right) - \left(\frac{9}{5}\cdot 1^{\frac{2}{3}}\right)\right] = \frac{9}{5} \lim_{b\to+\infty} \sqrt[3]{b^2} - \frac{9}{5} = +\infty.$$

Tehát az improprius integrál divergens.

5) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{4}{9x}\,dx$

Megoldás: A függvény nincs értelmezve 0-ban, de ez a pont kívül esik az integrációs intervallumon, úgyhogy nincs vele dolgunk. A fentiekhez hasonlóan:

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{4}{9x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{-1} \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{4}{9}\ln|x|\right]_a^{-1} = \frac{4}{9} \lim_{a\to-\infty} \Big[\ln(-x)\Big]_a^{-1} =$$

$$\frac{4}{9} \lim_{a\to-\infty} \Big[\ln 1 - \ln(-a)\Big] = -\infty.$$

Tehát az improprius integrál divergens.

6) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{10}{2x+4}\,dx$

Megoldás: A függvény nincs értelmezve -2-ben, de ez a pont kívül esik az integrációs intervallumon, úgyhogy nincs vele dolgunk. A fentiekhez hasonlóan:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{10}{2x+4}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{10}{2x+4}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{5}{x+2}\,dx$$

$$5 \cdot \lim_{b\to+\infty} \Big[\ln(x+2)\Big]_{1}^{b} = 5\cdot\ln(b+2) - 5\ln 3 = +\infty.$$

Tehát az improprius integrál divergens.

7) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

Megoldás: A függvény a pozitív számok halmazán van értelmezve az 1 pont kivételével, hiszen $\ln 1 = 0$, de ez a pont kívül esik az integrációs intervallumon, úgyhogy nincs vele dolgunk. A fentiekhez hasonlóan:

$$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{e}^{b} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{e}^{b} (\ln x)^{-1}\cdot\frac{1}{x}\,dx.$$

Az

$$\int (\ln x)^{-1}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

határozatlan integrál kiszámításához vegyük észre, hogy $\ln x$ deriváltja $\frac{1}{x}$. Tehát ha a külső függvényt a $K = x^{-1}$-nek választjuk, belsőnek pedig a $B = \ln x$-et, akkor az integrál alakja

$$\int K(B(x))\cdot B'(x)\,dx,$$

melyről tudjuk, hogy egy primitív függvénye (antideriváltja, határozatlan integrálja) $(\int K)\circ B$, tehát a $\int K$-ba „behelyettesítjük” a B belső függvényt. Esetünkben a $K = x^{-1} = \frac{1}{x}$ határozatlan integrálja szimbolikusan $\int K = \ln|x| + c$, így

$$\int (\ln x)^{-1}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \ln|\ln x| + c.$$

Visszatérve az improprius integrálhoz, az integrációs intervallumon $x \geq e$, tehát $\ln x \geq 1$, így az abszolút értékeket elhagyhatjuk:

$$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{e}^{b} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{e}^{b} (\ln x)^{-1}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \Big[\ln\ln x\Big]_{e}^{+\infty} =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \ln\ln b - \ln\ln e = +\infty.$$

Tehát az improprius integrál divergens.

8) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$

Megoldás: Akárcsak az előző feladatban, a függvény a pozitív számok halmazán van értelmezve az 1 pont kivételével, hiszen $\ln 1 = 0$, de ez a pont kívül esik az integrációs intervallumon, úgyhogy nincs vele dolgunk. A fentiekhez hasonlóan:

$$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{e}^{b} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{e}^{b} (\ln x)^{-2}\cdot\frac{1}{x}\,dx.$$

Az előző feladat mintájára, ha a külső függvényt a $K = x^{-2}$-nek választjuk, belsőnek pedig a $B = \ln x$-et, akkor az integrál alakja

$$\int K(B(x))\cdot B'(x)\,dx.$$

Most a $K = x^{-2}$ határozatlan integrálja $-\frac{1}{x}+c$, szimbolikusan $\int K = -\frac{1}{x}+c$, így

$$\int \frac{1}{x}(\ln^2 x)^{-1}\,dx = -\frac{1}{|\ln x|}+c.$$

Visszatérve az improprius integrálhoz, az integrációs intervallumon $x \geq e$, tehát $\ln x \geq 1$, így az abszolút értékeket elhagyhatjuk:

$$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{e}^{b} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{e}^{b} \frac{1}{x}(\ln x)^{-2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{e}^{+\infty} =$$

$$\frac{1}{\ln e} - \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\ln b} = 1.$$

Tehát az improprius integrál konvergens, és

$$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = 1.$$

9) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2}{(x+1)^5}\,dx$

Megoldás: A függvény nincs értelmezve -1-ben, de ez a pont kívül esik az integrációs intervallumon, úgyhogy nincs vele dolgunk. A fentiek mintájára

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2}{(x+1)^5}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b} \frac{2}{(x+1)^5}\,dx$$

A határozatlan integrál kiszámítása: $K = 2x^{-5}$, $B = x+1$, ekkor $B' = 1$, és

$$\int K = 2\cdot\frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{2x^4},$$

tehát
$$\int \frac{2}{(x+1)^5}\,dx = \int K(B(x))B'(x)\,dx = \Big(\int K\Big)\circ B = -\frac{1}{2(x+1)^4} + c.$$
Ezért
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{2}{(x+1)^5}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b} \frac{2}{(x+1)^5}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\Big[-\frac{1}{2(x+1)^4}\Big]_1^{+\infty} =$$
$$\frac{1}{2(1+1)^4} - \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2(b+1)^4} = \frac{1}{32}.$$
Tehát az improprius integrál konvergens, és
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{2}{(x+1)^5}\,dx = \frac{1}{32}.$$

10) $\int\limits_6^{+\infty} \frac{5}{(2x-3)^4}\,dx$

Megoldás: A függvény nincs értelmezve $\frac{3}{2}$-ben, de ez a pont kívül esik az integrációs intervallumon, úgyhogy nincs vele dolgunk. A fentiek mintájára
$$\int\limits_6^{+\infty} \frac{5}{(2x-3)^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_6^{b} \frac{5}{(2x-3)^4}\,dx.$$
A határozatlan integrál kiszámítása: $K = 5x^{-4}$, $B = 2x-3$, ekkor $B' = 2$, és
$$\int K = 5\cdot\frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{5}{3x^3}.$$
Mivel az eredeti integrálban a $B' = 2$ szorzó nem szerepel láthatóan, ezért „becsempésszük”: az integrálon belül szorzunk 2-vel, kívül pedig osztunk. Tehát
$$\int \frac{5}{(2x-3)^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{5}{(2x-3)^4}\cdot 2\,dx = \frac{1}{2}\int K(B(x))B'(x)\,dx =$$
$$\frac{1}{2}\Big(\int K\Big) = \frac{1}{2}\cdot\big(-\frac{5}{3(2x-3)^3}\big) + c = -\frac{5}{6(2x-3)^3} + c.$$
Ezért
$$\int\limits_6^{+\infty} \frac{5}{(2x-3)^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_6^{b} \frac{5}{(2x-3)^4}\,dx = \Big[-\frac{5}{6(2x-3)^3}\Big]_6^{b} =$$
$$\frac{5}{6(2\cdot 6-3)^3} - \lim_{b\to+\infty}\frac{5}{6(2b-3)^3} = \frac{5}{4374}.$$
Tehát az improprius integrál konvergens, és
$$\int\limits_6^{+\infty} \frac{5}{(2x-3)^4}\,dx = \frac{5}{4374}.$$

11) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2x}\,dx$

Megoldás: A fentiek mintájára

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} e^{-2x}\,dx.$$

A határozatlan integrál kiszámítása: $K = e^x$, $B = -2x$, ekkor $B' = -2$, és

$$\int K = \int = e^x,$$

tehát

$$\int e^{-2x}\,dx = \frac{1}{-2}\int e^{-2x}\cdot(-2)\,dx = -\frac{1}{2}\int K(B(x))B'(x)\,dx = -\frac{1}{2}\Big(\int K\Big)\circ B = -\frac{1}{2}e^{-2x} + c.$$

Ezért

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} e^{-2x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\Big[-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big]_0^{+\infty} =$$

$$-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}e^{-2b} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Tehát az improprius integrál konvergens, és

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \frac{1}{2}.$$

12) $\int\limits_{-\infty}^{-1} e^{-4x+3}\,dx$

Megoldás: A fentiek mintájára

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} e^{-4x+3}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{-1} e^{-4x+3}\,dx.$$

A határozatlan integrál kiszámítása: $K = e^x$, $B = -4x+3$, ekkor $B' = -4$, és

$$\int K = \int = e^x,$$

tehát

$$\int e^{-4x+3}\,dx = \frac{1}{-4}\int e^{-4x+3}\cdot(-4)\,dx = -\frac{1}{4}\int K(B(x))B'(x)\,dx = -\frac{1}{4}\Big(\int K\Big)\circ B = -\frac{1}{4}e^{-4x+3} + c.$$

Ezért

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} e^{-4x+3}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{-1} e^{-4x+3}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\Big[-\frac{1}{4}e^{-4x+3}\Big]_a^{-1} =$$

$$-\frac{1}{4}e^{-4\cdot(-1)+3} + \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}e^{-4a+3} = -\frac{1}{4}e^{7} + \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{4}e^{-4a+3} = +\infty.$$

Tehát az improprius integrál divergens.

13) $\int\limits_0^{+\infty} 4e^{-5x}\,dx$

Megoldás: A fentiek mintájára

$$\int\limits_0^{+\infty} 4e^{-5x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} 4e^{-5x}\,dx.$$

A határozatlan integrál kiszámítása: $K = 4e^x$, $B = -5x$, ekkor $B' = -5$, és

$$\int K = \int = 4e^x,$$

tehát

$$\int 4e^{-5x}\,dx = \frac{1}{-5}\int 4e^{-5x}\cdot(-5)\,dx = -\frac{1}{5}\int K(B(x))B'(x)\,dx = -\frac{1}{5}\Big(\int K\Big)\circ B = -\frac{1}{5}4e^{-5x} + c.$$

Ezért

$$\int\limits_0^{+\infty} 4e^{-5x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} 4e^{-5x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\Big[-\frac{4}{5}e^{-5x}\Big]_0^b =$$

$$-\lim_{b\to+\infty}\frac{4}{5}e^{-5b} + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}.$$

Tehát az improprius integrál konvergens, és

$$\int\limits_0^{+\infty} 4e^{-5x}\,dx = \frac{4}{5}.$$

14) $\int\limits_{-\infty}^{4} 5e^{-x+4}\,dx$

Megoldás: A fentiek mintájára

$$\int\limits_{-\infty}^{4} 5e^{-x+4}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^{4} 5e^{-x+4}\,dx.$$

A határozatlan integrál kiszámítása: $K = 5e^x$, $B = -x+4$, ekkor $B' = -1$, és

$$\int K = 5e^x,$$

tehát

$$\int 5e^{-x+4}\,dx = \frac{1}{-1}\int 5e^{-x+4}\cdot(-1)\,dx = -\int K(B(x))B'(x)\,dx = -\Big(\int K\Big)\circ B = -5e^{-x+4} + c.$$

Ezért

$$\int\limits_{-\infty}^{4} 5e^{-x+4}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^{4} 5e^{-x+4}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\Big[-5e^{-x+4}\Big]_a^4 =$$

$$-5e^{-4+4} + \lim_{a\to-\infty}5e^{-a+4} = -5 + \lim_{a\to-\infty}5e^{-a+4} = +\infty.$$

Tehát az improprius integrál divergens.

15) $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

Megoldás: A fentiek mintájára

$$\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{3}^{b} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

A határozatlan integrál kiszámítása: $K = \frac{1}{x^2}$, $B = x^2+1$, ekkor $B' = 2x$, és

$$\int K = -\frac{1}{x},$$

tehát

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \textcolor{red}{\frac{1}{2}} \int \frac{x}{(x^2+1)^2} \cdot \textcolor{red}{2}\,dx = \frac{1}{2} \int K(B(x))B'(x)\,dx = \frac{1}{2}\Big(\int K\Big) \circ B = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} + c.$$

Ezért

$$\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{3}^{b} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \Big[-\frac{1}{2(x^2+1)}\Big]_3^b =$$

$$-\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2(b^2+1)} + \frac{1}{2(3^2+1)} = \frac{1}{20}.$$

Tehát az improprius integrál konvergens, és

$$\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{20}.$$

16) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{3}{(2x+1)^4}\,dx$

Megoldás: A fentiek mintájára

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{3}{(2x+1)^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{3}{(2x+1)^4}\,dx.$$

A határozatlan integrál kiszámítása: $K = \frac{3}{x^4}$, $B = 2x+1$, ekkor $B' = 2$, és

$$\int K = \frac{3}{-3 \cdot x^3} = -\frac{1}{x^3},$$

tehát

$$\int \frac{3}{(2x+1)^4}\,dx = \textcolor{red}{\frac{1}{2}} \int \frac{3}{(2x+1)^4} \cdot \textcolor{red}{2}\,dx = \frac{1}{2} \int K(B(x))B'(x)\,dx = \frac{1}{2}\Big(\int K\Big) \circ B = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2x+1)^3} + c.$$

Ezért

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{3}{(2x+1)^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{3}{(2x+1)^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \Big[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2x+1)^3}\Big]_1^b =$$

$$-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2(2b+1)^3}+\frac{1}{2(2\cdot 1+1)^3}=\frac{1}{54}.$$

Tehát az improprius integrál konvergens, és

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{3}{(2x+1)^4}\,dx=\frac{1}{54}.$$

17) $\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{5}{7x-9}\,dx$

Megoldás: A függvény nincs értelmezve $\frac{9}{7}$-ben, de ez a pont kívül esik az integrációs intervallumon, úgyhogy nincs vele dolgunk. A fentiek mintájára

$$\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{5}{7x-9}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{1}\frac{5}{7x-9}\,dx.$$

A határozatlan integrál kiszámítása: $K=\frac{5}{x}$, $B=7x-9$, ekkor $B'=7$, és

$$\int K=5\ln|x|,$$

tehát

$$\int\frac{5}{7x-9}\,dx=\frac{1}{7}\int\frac{5}{7x-9}\cdot 7\,dx=\frac{1}{7}\int K(B(x))B'(x)\,dx=\frac{1}{7}\Big(\int K\Big)\circ B=\frac{1}{7}\cdot 5\ln|7x-9|+c.$$

Ezért

$$\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{5}{7x-9}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{1}\frac{5}{7x-9}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{7}\cdot 5\ln|7x-9|\right]_a^1=$$

$$\frac{5}{7}\cdot\ln|7\cdot 1-9|-\lim_{a\to-\infty}\frac{5}{7}\cdot\ln|7a-9|=-\infty.$$

Tehát az improprius integrál divergens.

18) $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{x}{x^2+1}\,dx$

Megoldás: A fentiek mintájára

$$\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{x}{x^2+1}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{-1}\frac{x}{x^2+1}\,dx.$$

A határozatlan integrál kiszámítása: $K=\frac{1}{x}$, $B=x^2+1$, ekkor $B'=2x$, és

$$\int K=\ln|x|,$$

tehát

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\cdot 2\,dx = \frac{1}{2}\int K(B(x))B'(x)\,dx = \frac{1}{2}\Big(\int K\Big)\circ B = \frac{1}{2}\cdot \ln(x^2+1)+c.$$

Ezért

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{-1} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\Big[\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+1)\Big]_a^{-1} =$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+1) - \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\cdot\ln(a^2+1) = -\infty.$$

Tehát az improprius integrál divergens.

19) $\int\limits_{-\infty}^{8} \frac{2}{\sqrt[3]{4-3x}}\,dx$

Megoldás: A függvény nincs értelmezve a $\frac{4}{3}$-ban, s ez a pont beleesik az integrációs intervallumba. Ez az improprius integrál olyan változatára példa, amikor nem csak az integrációs intervallum végtelen, de azon belül is vannak olyan pontok, ahol az integrandus nincs értelmezve. Az ilyen pontok diszjunkt részintervallumokra bontják az integr'aciós intervallumot, melyeken külön-külön kell vizsgálnunk az integrált. Ha mindegyiken konvergens az integrál, akkor az eredeti integrál konvergens, és értéke a részintervallumokon vet integrálok összege. Minden egyéb esetben az eredeti integrál divergens. Esetünkben tehát először a $]-\infty,\frac{4}{3}[$ intervallumon vizsgáljuk meg az integrált:

$$\int_{-\infty}^{\frac{4}{3}} \frac{2}{\sqrt[3]{4-3x}}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{\frac{4}{3}} \frac{2}{\sqrt[3]{4-3x}}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{\frac{4}{3}} 2(4-3x)^{-\frac{1}{3}}\,dx.$$

A határozatlan integrál kiszámítása: $K = 2x^{-\frac{1}{3}}$, $B = 4-3x$, ekkor $B' = -3$, és

$$\int K = 2x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{2},$$

tehát

$$\int 2(4-3x)^{-\frac{1}{3}}\,dx = -\frac{1}{3}\int 2(4-3x)^{-\frac{1}{3}}\cdot(-3)\,dx = -\frac{1}{3}\int K(B(x))B'(x)\,dx = \frac{1}{2}\Big(\int K\Big)\circ B =$$

$$-\frac{1}{3}\cdot 2(4-3x)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{2}+c = -(4-3x)^{\frac{2}{3}}+c.$$

Ezért

$$\int_{-\infty}^{\frac{4}{3}} \frac{2}{\sqrt[3]{4-3x}}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{\frac{4}{3}} \frac{2}{\sqrt[3]{4-3x}}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\Big[-(4-3x)^{\frac{2}{3}}\Big]_a^{\frac{4}{3}} = \lim_{a\to-\infty}(4-3x)^{\frac{2}{3}} = +\infty,$$

ami divrgens, tehát az improprius integrál – függetlenül a másik részintervallumon vett integráltól – divergens.

20) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt[5]{(5x+4)^4}}\,dx$

Megoldás: A függvény nincs értelmezve $-\frac{1}{5}$-ben, de ez a pont kívül esik az integrációs intervallumon, úgyhogy nincs vele dolgunk. A fentiek mintájára:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt[5]{(5x+4)^4}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} \frac{2}{\sqrt[5]{(5x+4)^4}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} 2(5x+4)^{-\frac{4}{5}}\,dx.$$

A határozatlan integrál kiszámítása: $K = 2x^{-\frac{4}{5}}$, $B = 5x+4$, ekkor $B' = 5$, és

$$\int K = \frac{2x^{-\frac{4}{5}}}{\frac{1}{5}} + c = 10x^{\frac{1}{5}} + c,$$

tehát

$$\int 2(5x+4)^{-\frac{4}{5}}\,dx = \frac{1}{5} \int\limits_0^{+\infty} 2(5x+4)^{-\frac{4}{5}} \cdot 5\,dx = \frac{1}{5} \int K(B(x))B'(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{5}\Big(\int K\Big) \circ B = \frac{1}{5} \cdot 10(5x+4)^{\frac{1}{5}} + c = 2(5x+4)^{\frac{1}{5}} + c.$$

Ezért

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt[5]{(5x+4)^4}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} 2(5x+4)^{-\frac{4}{5}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \Big[2(5x+4)^{\frac{1}{5}}\Big]_0^b =$$

$$\lim_{b\to+\infty} 2(5b+4)^{\frac{1}{5}} - 2 \cdot 4^{\frac{1}{5}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt[5]{5b+4} - 2\sqrt[5]{4} = +\infty,$$

tehát az improprius integrál divergens.

21) $\int\limits_3^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx$

Megoldás: A függvény nincs értelmezve -1-ben, de ez a pont kívül esik az integrációs intervallumon, úgyhogy nincs vele dolgunk. A fentiek mintájára a két integrállal külön foglalkozunk, s ha bármelyik divergens, a másik pedig konvergens, akkor az eredeti is divergens, ha pedig mindkettő konvergens, akkor az eredeti integrál is konvergens, és értéke a két integrál összege.

Először tehát legyen

$$I = \int\limits_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int\limits_3^{+\infty} (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_3^{b} (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Először a megfelelő határozatlan integrált számítjuk ki. Legyen tehát $K = x^{-\frac{1}{2}}$, $B = x+1$, ekkor $B' = 1$, és

$$\int K = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c,$$

tehát

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int (x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1\,dx = \int K(B(x))B'(x)\,dx =$$

$$\left(\int K\right) \circ B = 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + c.$$

Ezért

$$I = \int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_3^b (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[2(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_3^b =$$

$$\lim_{b\to+\infty} 2(b+1)^{\frac{1}{2}} - 4 = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{b+1} - 4 = +\infty.$$

A másik integrált hasonlóan számítjuk ki:

$$J = \int_3^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_3^b \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_3^b (x+1)^{-2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-(x+1)^{-1}\right]_3^b =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{x+1}\right]_3^b = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b+1} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Mivel az egyik tag divergens, a másik konvergens, így az összeg, vagyis az eredeti integrál divergens. Megjegyezzük, hogy ha mindkét tag divergens, akkor az összeg lehet konvergens is, divergens is, s akkor más módszert kell választani az integrál kiszámítására, esetleg a két összeadandót egyetlen tagba kell összevonni. Pl. az $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ és $\int\limits_0^{+\infty} -\frac{1}{x}\,dx$ improprius integrálok mindegyike divergens – amint azt könnyű ellenőrizni –, de összegük, $\int\limits_0^{+\infty} \left[\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x}\right)\right]dx = \int\limits_0^{+\infty} 0\,dx$ nyilván konvergens.

22) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{3x}\,dx$

Megoldás: Mivel mind az alsó, mind a felső határ végtelen, ezért az integrál akkor konvergens, ha a

$$\lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to+\infty} \int_a^b e^{3x}\,dx$$

határérték – a sorrendtől függetlenül – létezik és véges.

Tehát a fentiekhez hasonlóan:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{3x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to+\infty} \int_a^b e^{3x}\,dx$$

A határozatlan integrál nyilván az $\frac{1}{3}e^{3x} + c$ függvény, így

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{3x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to+\infty} \int_a^b e^{3x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_a^b = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{3}e^{3b} - \frac{1}{3}e^{3a}\right]_a^b.$$

A belső határérték minden a esetén $+\infty$, így az improprius integrál divergens.

23) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x}{x^2+2}\, dx$

Megoldás: Mivel mind az alsó, mind a felső határ végtelen, ezért az integrál akkor konvergens, ha a

$$\lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b \frac{3x}{x^2+2}\, dx$$

határérték – a sorrendtől függetlenül – létezik és véges.

Először a megfelelő határozatlan integrált számítsuk ki: legyen $K = \frac{3}{x}$, $B = x^2 + 2$, ekkor $B' = 2x$, és

$$\int K = 3 \ln|x| + c.$$

Ezért

$$\int \frac{3x}{x^2+2}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{3}{x^2+2} \cdot 2x\, dx = \frac{1}{2} \int K\big(B(x)\big) \cdot B'(x)\, dx = \frac{1}{2}\Big(\int K\Big) \circ B =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \ln|x^2+2| + c = \frac{3}{2} \ln(x^2+2) + c,$$

hiszen $x^2 + 2$ mindig pozitív, így $|x^2+2| = x^2 + 2$. Végül tehát

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x}{x^2+2}\, dx = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b \frac{3x}{x^2+2}\, dx =$$

$$\lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{3}{2} \ln(x^2+2)\right]_a^b = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{3}{2} \ln(b^2+2) - \frac{3}{2} \ln(a^2+2)\right).$$

A belső határérték nyilván minden rögzített a esetén $+\infty$, így az impropriius integrál divergens.

24) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 5xe^{-3x^2}\, dx$

Megoldás: Mivel mind az alsó, mind a felső határ végtelen, ezért az integrál akkor konvergens, ha a

$$\lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b 5xe^{-3x^2}\, dx$$

határérték – a sorrendtől függetlenül – létezik és véges.

Először a megfelelő határozatlan integrált számítsuk ki: legyen $K = 5e^{-3x}$, $B = x^2$, ekkor $B' = 2x$, és

$$\int K = -\frac{5}{3} e^{-3x} + c.$$

Ezért

$$\int 5xe^{-3x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int 5e^{-3x^2} \cdot 2x\, dx = \frac{1}{2} \int K\big(B(x)\big) \cdot B'(x)\, dx = \frac{1}{2}\Big(\int K\Big) \circ B =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \Big(-\frac{5}{3} e^{-3x^2}\Big) + c = -\frac{5}{6} e^{-3x^2} + c.$$

Végül tehát

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 5xe^{-3x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} 5xe^{-3x^2}\,dx =$$

$$\lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{5}{6}e^{-3x^2}\right]_a^b = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{5}{6}e^{-3b^2}+\frac{5}{6}e^{-3a^2}\right) = 0,$$

ugyanis nyilván

$$\lim_{a\to-\infty} e^{-3a^2} = \lim_{b\to+\infty} e^{-3b^2} = 0,$$

hiszen

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

25) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{5x}}{e^{5x}+3}\,dx$

Megoldás: Mivel mind az alsó, mind a felső határ végtelen, ezért az integrál akkor konvergens, ha a

$$\lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b \frac{e^{5x}}{e^{5x}+3}\,dx$$

határérték – a sorrendtől függetlenül – létezik és véges.

Először a megfelelő határozatlan integrált számítsuk ki: legyen $K = \frac{1}{x+3}$, $B = e^{5x}$, ekkor $B' = 5e^{5x}$, és

$$\int K = \ln|x+3| + c.$$

Ezért

$$\int \frac{e^{5x}}{e^{5x}+3}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{e^{5x}+3}\cdot 5e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}\int K\big(B(x)\big)\cdot B'(x)\,dx = \frac{1}{5}\Big(\int K\Big)\circ B =$$

$$\frac{1}{5}\cdot\ln|1+e^{5x}| + c = \frac{1}{5}\ln(1+e^{5x}) + c,$$

hiszen $1+e^{5x}$ mindig pozitív. Végül tehát

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{5x}}{e^{5x}+3}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b \frac{e^{5x}}{e^{5x}+3}\,dx =$$

$$\lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{5}\ln(1+e^{5x})\right]_a^b = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\ln(1+e^{5b}) - \frac{1}{5}\ln(1+e^{5a})\right).$$

A belső határérték tetszőleges a mellett nyilván $+\infty$, ezért az integrál divergens.

26) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$

Megoldás: Mivel mind az alsó, mind a felső határ végtelen, ezért az integrál akkor konvergens, ha a

$$\lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b xe^{-x^2}\,dx$$

határérték – a sorrendtől függetlenül – létezik és véges.

Először a megfelelő határozatlan integrált számítsuk ki: legyen $K = e^{-x}$, $B = x^2$, ekkor $B' = 2x$, és

$$\int K = -e^{-x} + c.$$

Ezért

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-x^2}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int K\big(B(x)\big)\cdot B'(x)\,dx = \frac{1}{2}\Big(\int K\Big)\circ B =$$

$$\frac{1}{2}\cdot(-e^{-x^2}) + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c.$$

Végül tehát

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx =$$

$$\lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_a^b = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\Big(-\frac{1}{2}e^{-b^2} + \frac{1}{2}e^{-b^2}\Big) = 0,$$

ugyanis nyilván

$$\lim_{a\to-\infty} e^{-a^2} = \lim_{b\to+\infty} e^{-b^2} = 0,$$

hiszen

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$