Függvényvizsgálat

1. Hol metszi az x tengelyt az $f(x) = \ln(x^2 - 3)$ függvény grafikonja?

   Megoldás: A függvény értelmezési tartománya:

   $$]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[.$$

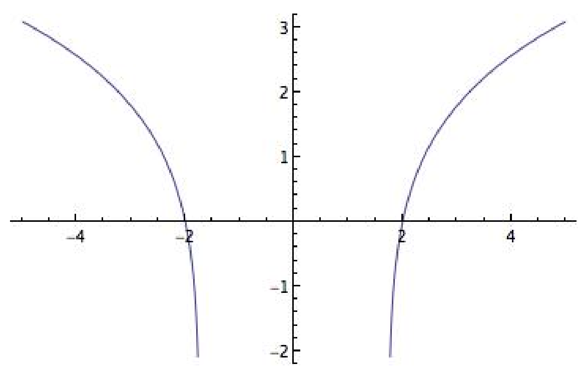
   Az x tengelyt abban a pontban metszi egy $f(x)$ függvény grafikonja, amelynek y-koordinátája 0, tehát abban az $\big(x, f(x)\big)$ pontban, melynél $f(x) = 0$. Esetünkben tehát az

   $$f(x) = \ln(x^2 - 3) = 0$$

   egyenlet x megoldásait kell meghatározni. Alkalmazzuk mindkét oldalra az e alapú exponenciális függvényt:

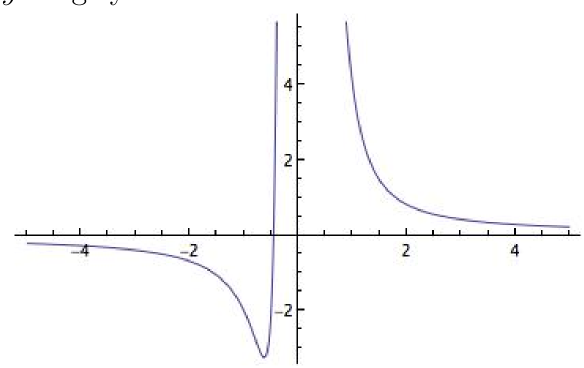
   $$x^2 - 3 = e^{\ln(x^2-3)} = e^0 = 1, \text{ azaz } x^2 = 4,$$

   vagyis $x = \pm 2$. Az $f(x)$ értelmezve van ezekben a pontokban, így a grafikonjának ezek valóban az x tengellyel való metszépontjai.



2. Hol metszi az y tengelyt az $f(x) = \frac{x^3+2x+1}{x^4}$ függvény grafikonja?

   Megoldás: A függvény értelmezési tartománya: $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Az y tengelyt abban a pontban metszi egy $f(x)$ függvény grafikonja, amelynek x-koordinátája 0, tehát a $\big(0, f(0)\big)$ pontban. Esetünkben a 0 nem tartozik bele a függvény értelmezési tartományába, $f(0)$ nincs értelmezve, így a függvény grafikonja nem metszi az y tengelyt.

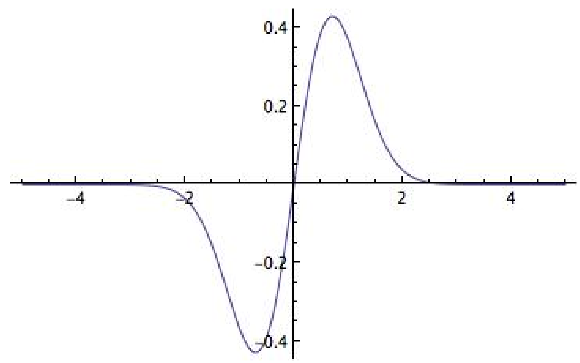


3. Vizsgálja meg az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvény szimmetriatulajdonságait!

Megoldás: A szimmetriatulajdonságok alatt az y tengelyre való szimmetriát (páros függvény), illetve az origóra való szimmetriát (páratlan függvény) kell érteni. Az $f(x)$ akkor páros, ha $f(-x) = f(x)$, illetve akkor páratlan, ha $f(-x) = -f(x)$ teljesül az értelmezési tartomány minden x pontjában. Esetünkben $f(x)$ mindenütt értelmezve van a valós számok $\mathbb{R}$ halmazán. Ha x helyére $-x$-et írunk az $f(x)$-et definiáló formulában, akkor

$$f(-x) = (-x) \cdot e^{-(-x)^2} = -x \cdot e^{-x^2} = -f(x)$$

adódik, tehát $f(x)$ páratlan függvény.

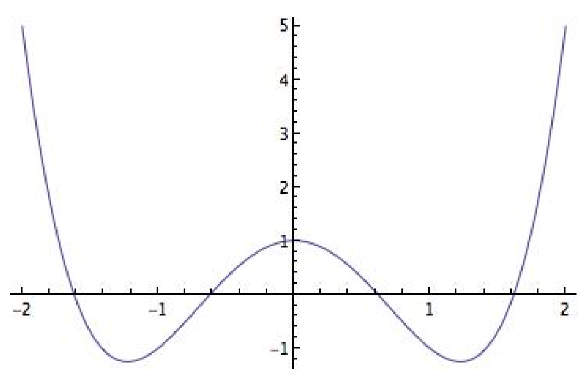


4. Vizsgálja meg az $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ függvény szimmetriatulajdonságait!

Megoldás: Ha x helyére $-x$-et írunk az $f(x)$-et definiáló formulában, akkor

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$$

adódik, tehát $f(x)$ páros függvény. Egyébként a páros kitevőjű hatványfüggvények páros függvények, valamint páros függvények konstansszorosa, illetve páros függvények összege páros függvény – esetünkben $f(x)$ páros kitevőjű hatványfüggvényekből ilyen módon épül fel.



5. Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Határozza meg az $f(x) = x^3 - x^2 + x$ függvény inflexiós pontjait!

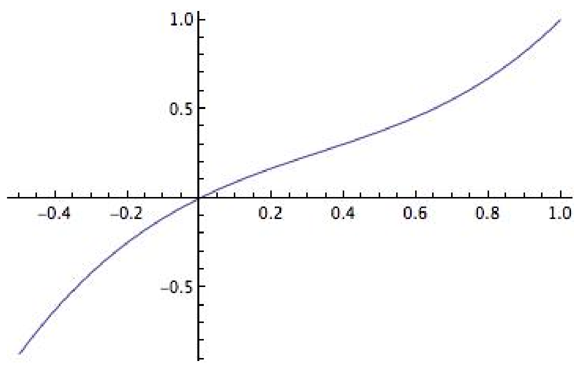
Megoldás: A függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. Inflexiós pontoknak a függvénygörbe azon pontjait nevezzük, ahol a görbe konvex ívből konkávba, vagy konkáv ívből konvexbe vált. Ezeket abból lehet felismerni, hogy az ilyen pontokban a második derivált előjelet vált, pozitívból negatívba, vagy negatívból pozitívba. A derivált és a második derivált:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1, \qquad f''(x) = 6x - 2.$$

Az $f''(x)$ zérushelyei a következő egyenlet gyökei:

$$f''(x) = 6x - 2 = 0,$$

tehát egyetlen gyök van: $x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Ha $x < \frac{1}{3}$, akkor $6x < 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$, tehát $6x - 2 < 0$, ha pedig $x > \frac{1}{3}$, akkor $6x > 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$, tehát $6x - 2 > 0$. Ez azt jelenti, hogy az $\frac{1}{3}$ pontban az $f''(x)$ előjelet vált, így ebben a pontban $f(x)$-nek inflexiós pontja van, máshol nincs. Az ábrán nagyjából látható, hogy az $x = \frac{1}{3}$ pontban konkáv és konvex ív csatlakozik.



6. Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Határozza meg az $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás: A függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. A lokális szélsőértékhelyek azok a pontok, ahol a derivált előjelet vált. A derivált:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x.$$

Az $f'(x)$ zérushelyei a következő egyenlet gyökei:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x - 1)(x + 1) = 0,$$

melynek három gyöke van: nagyság szerint $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 1$. Ha $x < -1$, például $x = -2$, akkor $f'(-2) = -24 < 0$, ha pedig $-1 < x < 0$, például $x = -\frac{1}{2}$, akkor $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} > 0$. Ez azt jelenti, hogy a -1 pontban az $f'(x)$ előjelet vált, negatívból pozitívba, így ebben a pontban $f(x)$-nek lokális szélsőértéke van, mégpedig lokális minimum, melynek értéke $f(-1) = 2$. Ha $0 < x < 1$, például $x = \frac{1}{2}$, akkor $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} > 0$, $f'(x)$ előjele a 0 pontban pozitívból negatívba vált, így 0-ban lokális maximuma van $f(x)$-nek, melynek értéke $f(0) = 3$. Végül, ha $x > 1$, például $x = 2$, akkor $f'(2) = 24 > 0$, tehát az 1 pontban $f'(x)$ negatívból pozitívba vált, s így az 1 pontban lokális minimuma van $f(x)$-nek, értéke $f(1) = 2$. (A függvény képét lásd a következő feladatnál.)

7. Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Határozza meg az $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ függvény inflexiós pontjait!

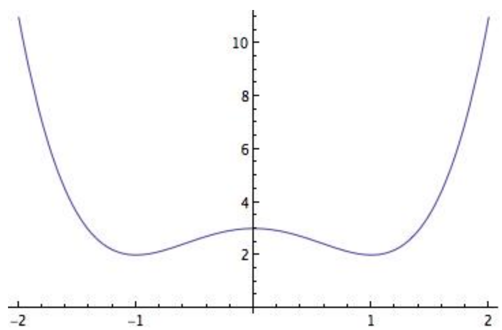
Megoldás: A függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. A inflexiós pontok, ott vannak, ahol a második derivált előjelet vált. A deriváltak:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \qquad f''(x) = 12x^2 - 4$$

Az $f''(x)$ zérushelyei a következő egyenlet gyökei:

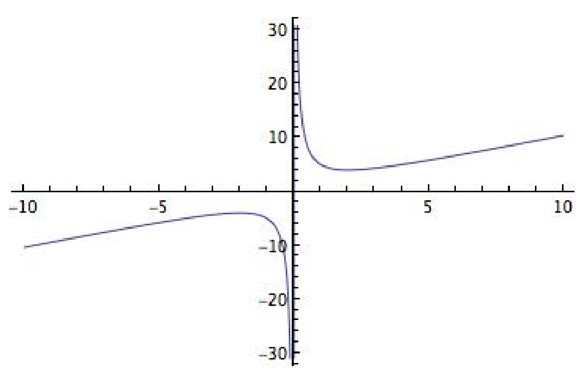
$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 12x\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = 4x\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0,$$

melynek három gyöke van: nagyság szerint $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = 0$ és $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ha $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$, például $x = -2$, akkor $f''(-2) = 44 > 0$, ha pedig $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < 0$, például $x = -\frac{1}{2}$, akkor $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 < 0$. Ez azt jelenti, hogy a $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ pontban az $f''(x)$ előjelet vált, így ebben a pontban $f(x)$-nek inflexiós pontja van. Ha $0 < x < 1$, például $x = \frac{1}{2}$, akkor $f''\left(\frac{1}{2}\right) = -1 < 0$, $f''(x)$ tehát a 0 pontban nem vált előjelet, így 0-ban nincs inflexiós pont. Végül, ha $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$, például $x = 2$, akkor $f''(2) = 44 > 0$, tehát az $\frac{1}{\sqrt{3}}$ pontban $f''(x)$ előjelet vált, s így az $\frac{1}{\sqrt{3}}$ pontban is inflexiós pontja van $f(x)$-nek.



8. Határozza meg az $f(x) = x + \frac{4}{x}$ függvény lokális minimumának és maximumának függvényértékét!

Megoldás: A függvény értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.



Deriváltja:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2},$$

s a derivált zérushelyei az

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0, \text{ azaz } x^2 = 4$$

egyenletből $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$. Ha $x < -2$, akkor $x^2 > 4$, így $\frac{4}{x^2} < 1$, tehát $f'(x) > 0$, ha pedig $-2 < x < 2$, akkor $x^2 < 4$, így $\frac{4}{x^2} > 1$, tehát $f'(x) < 0$. Ezért $f'(x)$ a -2 pontban előjelet vált, pozitívból negatívba, így a -2 pontban a függvénynek lokális maximuma van, értéke $f(-2) = -4$. Ha $x > 2$, akkor $x^2 > 4$, így $\frac{4}{x^2} < 1$, tehát $f'(x) > 0$. Ezért $f'(x)$ a 2 pontban is előjelet vált, negatívból pozitívba, így a 2 pontban a függvénynek lokális minimuma van, értéke $f(2) = 4$.

9. Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Határozza meg az $f(x) = \frac{6x}{x^2+2}$ függvény lokális szélsőértékeit!

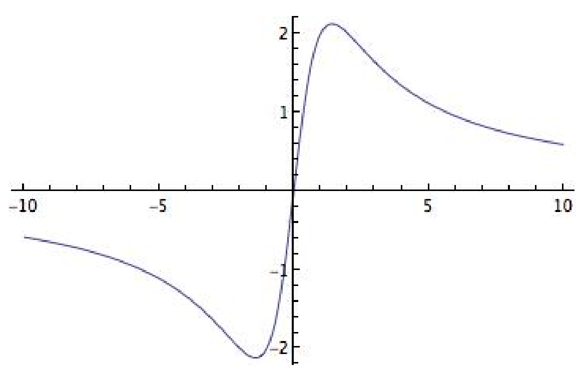
Megoldás: A függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. A lokális szélsőértékhelyek azok a pontok, ahol a derivált előjelet vált. A derivált:

$$f'(x) = \frac{6(x^2+2) - 6x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-6x^2+12}{(x^2+2)^2}.$$

Az $f'(x)$ zérushelyei a következő egyenlet gyökei:

$$f'(x) = -6x^2 + 12 = -6(x^2 - 2) = -6(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0,$$

melynek két gyöke van: nagyság szerint $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$. Ha $x < -\sqrt{2}$, például $x = -2$, akkor $f'(-2) = -12 < 0$, ha pedig $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, például $x = 0$, akkor $f'(0) = 12 > 0$. Ez azt jelenti, hogy a $-\sqrt{2}$ pontban az $f'(x)$ előjelet vált, negatívból pozitívba, így ebben a pontban $f(x)$-nek lokális szélsőértéke van, mégpedig lokális minimum, melynek értéke $f(-\sqrt{2}) = -\frac{6\sqrt{2}}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Ha $x > \sqrt{2}$, például $x = 2$, akkor $f'(2) = -12 < 0$, tehát az $\sqrt{2}$ pontban $f'(x)$ pozitívból negatívba vált, s így a $\sqrt{2}$ pontban lokális maximuma van $f(x)$-nek, értéke $f(\sqrt{2}) = \frac{6\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

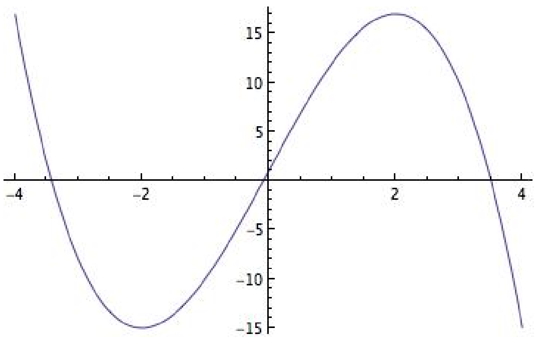


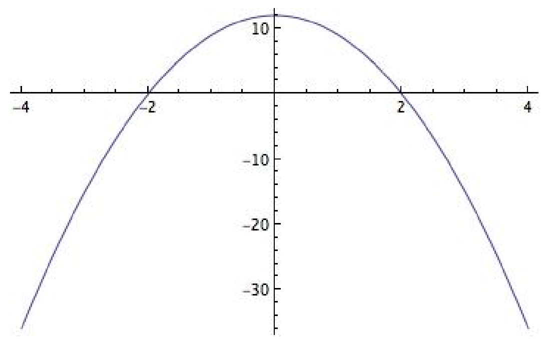
10. Milyen intervallumokon nő az $f(x) = -x^3 + 12x + 1$ függvény?

Megoldás: A függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. A függvény azokon az intervallumokon nő, amelyeken a deriváltja pozitív. Esetünkben:

$$f'(x) = -3x^2 + 12 > 0, \text{ azaz } 3x^2 < 12, \text{ azaz } x^2 < 4.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha $|x| < 2$, vagyis a $]-2, 2[$ nyílt intervallumban. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha észrevesszük, hogy az $f'(x)$ függvény képe egy lefelé nyíló parabola (mert a négyzetes tag együtthatója negatív), s egy ilyen parabola pontosan a két gyöke által meghatározott nyílt intervallumban vesz fel pozitív értékeket. Ez a gondolatmenet minden másodfokú egyenlőtlenség esetén alkalmazható. Az alábbi ábrán az $f(x)$ és az $f'(x)$ képét látjuk.





11. Milyen intervallumokon csökken az $f(x) = -2x^3 + 6x - 4$ függvény?

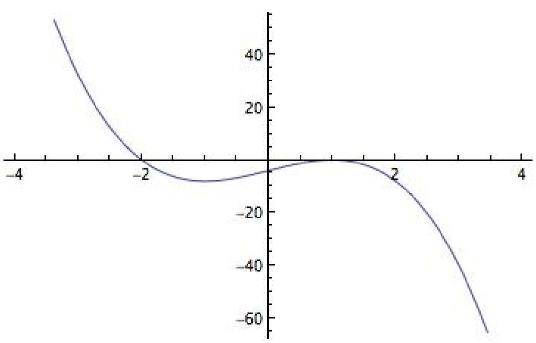
Megoldás: A függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. A függvény azokon az intervallumokon csökken, amelyeken a deriváltja negatív. Esetünkben:

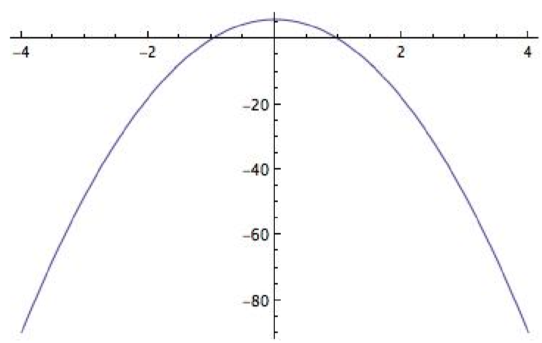
$$f'(x) = -6x^2 + 6 < 0.$$

Az $f'(x)$ függvény képe egy lefelé nyíló parabola (mert a négyzetes tag együtthatója negatív), s egy ilyen parabola pontosan a két gyöke által meghatározott nyílt intervallumon kívül vesz fel negatív értékeket. A két gyök a

$$-6x^2 + 6 = 0, \text{ azaz } x^2 - 1 = 0$$

egeynletből $x = -1$ és $x = 1$, tehát az $f(x)$ függvény a $]-\infty, -1[$ és $]1, +\infty[$ intervallumokon csökken. Az alábbi ábrán az $f(x)$ és az $f'(x)$ képét látjuk.



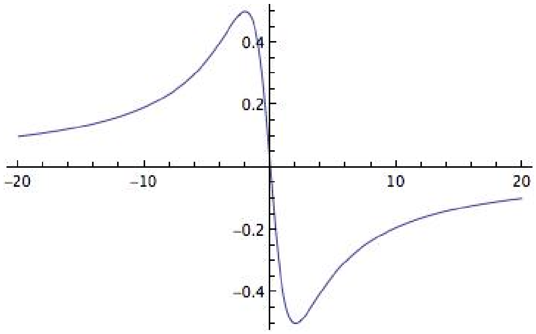


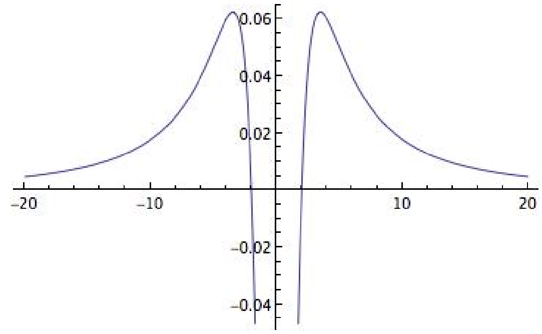
12. Milyen intervallumokon nő az $f(x) = -\frac{2x}{x^2+4}$ függvény?

Megoldás: A függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. A függvény azokon az intervallumokon nő, amelyeken a deriváltja pozitív. Esetünkben:

$$f'(x) = -\frac{2(x^2+4) - 2x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} > 0, \text{ azaz } \frac{2x^2 - 8}{(x^2+4)^2} > 0, \text{ azaz } x^2 - 4 > 0.$$

Az $x^2 - 4$ függvény képe egy felfelé nyíló parabola (mert a négyzetes tag együtthatója pozitív), s egy ilyen parabola pontosan a két gyöke által meghatározott nyílt intervallumon kívül vesz fel pozitív értékeket. A két gyök $x = -2$ és $x = 2$, tehát az $f(x)$ függvény a $]-\infty, -2[$ és $]2, +\infty[$ intervallumokon nő. Az alábbi ábrán az $f(x)$ és az $f'(x)$ képét látjuk





13. Határozza meg az $f(x) = -\frac{2x}{x^2+4}$ függvény lokális minimumának és lokális maximumának értékét!

    Megoldás: Az előbbi feladatban láttuk, hogy

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{(x^2+4)^2},$$

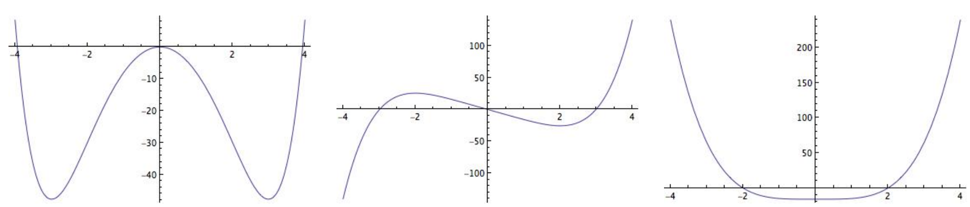
melynek zérushelyei az $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$ pontok. Azt is láttuk, hogy a függvény a $]-\infty, -2[$ és $]2, +\infty[$ intervallumokon nő, s ugyanez a megfontolás mutatja, hogy a $]-2, 2[$ intervallumban csökken. Ebből világos, hogy a -2 pontban növekvőből csökkenőbe vált, vagyis -2-ben lokális maximuma van, értéke: $f(-2) = \frac{1}{2}$. Másrészt, a 2 pontban csökkenőből növekvőbe vált, tehát a 2 pontban lokális minimuma van, melynek értéke $f(2) = -\frac{1}{2}$.

14. Hol konkáv az $f(x) = \frac{x^6}{30} - 8x^2$ függvény?

    Megoldás: A függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$. Egy kétszer differenciálható függvény azokon az intervallumokon konkáv, amelyeken a második deriváltja negatív. Esetünkben

$$f'(x) = \frac{x^5}{5} - 16x, \qquad f''(x) = x^4 - 16.$$

Az $f''(x) = x^4 - 16 = 0$ egyenlet két gyöke $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$. Ha $x < -2$, például $x = -3$, akkor $f''(-3) = 65 > 0$, ha $-2 < x < 2$, például $x = 0$, akkor $f''(0) = -16 < 0$, s végül, ha $x > 2$, például $x = 3$, akkor $f''(3) = 65$. Így az $f(x)$ függvény pontosan a $]-2, 2[$ intervallumon konkáv. Az alábbi ábrán $f(x)$, $f'(x)$ és $f''(x)$ grafikonja látható.



15. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^4$ függvényen!

    Megoldás: A teljes függvényvizsgálat során a következő lépések mentén haladunk:

    i. Az értelmezési tartomány meghatározása.
    ii. A grafikon és a tengelyek közös pontjainak meghatározása.
    iii. Szimmetriatulajdonságok vizsgálata.
    iv. Határértékek az értelmezési tartomány határain.
    v. Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőértékek meghatározása.

vi. Konvexitás vizsgálata, inflexiós pontok meghatározása.

vii. Grafikon rajzolása.

viii. Az értékkészlet meghatározása.

Esetünkben:

i. Az értelmezési tartomány meghatározása: $D_f = \mathbb{R}$.

ii. A grafikon és a tengelyek közös pontjainak meghatározása: az x tengellyel való metszéspont az

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^4 = 0$$

egyenlet megoldása alapján

$$0 = x^3 - \frac{1}{2}x^4 = x^3\Big(1 - \frac{1}{2}x\Big),$$

amiből $x_1 = 0$, vagy $x_2 = 2$ adódik. Az y tengellyel való metszéspont $f(0) = 0$. Tehát a függvénygörbe átmegy az origón.

iii. Szimmetriatulajdonságok vizsgálata: a párosság – páratlanság vizsgálatához az $f(-x)$-et kell kiszámítani:

$$f(-x) = (-)x^3 - \frac{1}{2}(-x)^4 = -x^3 - \frac{1}{2}x^4,$$

ami nem egyenlő sem $f(x)$-szel, sem $f(-x)$-el, tehát a függvény sem nem páros, sem nem páratlan.

iv. Határértékek az értelmezési tartomány határain: ez most a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben való határérték meghatározását jelenti:

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - \frac{1}{2}x^4 = \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\Big).$$

Itt a zárójelben levő kifejezés határértéke $0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, s ez meg van szorozva a $+\infty$ határértékkel rendelkező x^4 függvénnyel, így az „előjel-szabály” alapján a határérték $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - \frac{1}{2}x^4 = -\infty.$$

A másik határértéket hasonlóan számíthatjuk ki, és ugyanezzel a megfontolással kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - \frac{1}{2}x^4 = -\infty.$$

v. Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőértékek meghatározása: ehhez kiszámítjuk a függvény deriváltját:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x^3.$$

A monotonitási szakaszok felderítéséhez, és a lokális szélsőértékek meghatározásához is, a derivált zérushelyeire van szükség, vagyis az

$$f'(x) = 3x^2 - 2x^3 = x^2(3 - 2x) = 0$$

egyenlet megoldásaira, amelyek $x_3 = 0$ és $x_4 = \frac{3}{2}$ (a kapott nevezetes x pontokat folyamatosan számozzuk, függetlenül attól, hogy lehetnek köztük egyenlők is). A kapott két megoldás három diszjunkt intervallumra bontja az értelmezési tartományt, a valós számegyenest: a

$]-\infty, 0[$ intervallumon $f'(x) > 0$, amit például az $x = -1$ behelyettesítésével ellenőrizhetünk: $f'(-1) = 5 > 0$, ezért ezen az intervallumon $f(x)$ szigorúan nő. A $]0, \frac{3}{2}[$ intervallumon $f'(x) > 0$, amit például az $x = 1$ behelyettesítésével ellenőrizhetünk: $f'(1) = 1 > 0$, ezért $f(x)$ szigorúan nő ezen az intervallumon is. Ez azt jelenti, hogy a 0 pontban a derivált nem vált előjelet, tehát a 0-ban nincs lokális szélsőérték. Végül a $]\frac{3}{2}, +\infty[$ intervallumon $f'(x) < 0$, amit például az $x = 2$ behelyettesítésével ellenőrizhetünk: $f'(2) = -4 < 0$, ezért ezen az intervallumon $f(x)$ szigorúan csökken. Következésképpen, a $\frac{3}{2}$ pontban a derivált előjelet vált, tehát ebben a pontban lokális szélsőérték van, s mivel a derivált pozitívból negatívba vált, ez lokális maximum, melynek értéke: $f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{32}$.

vi. Konvexitás vizsgálata, inflexiós pontok meghatározása: ehhez a második deriváltra van szükség:

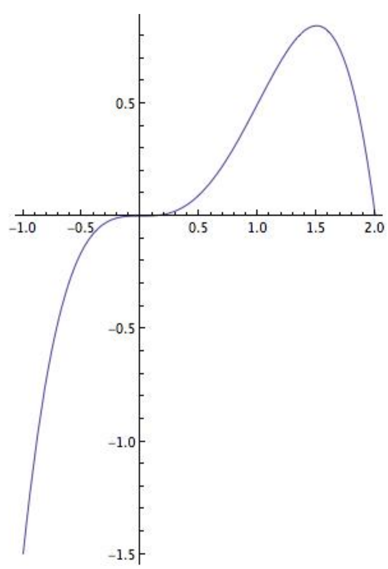
$$f''(x) = 6x - 6x^2.$$

A konvexitási szakaszok felderítéséhez, és az inflexiós pontok meghatározásához is a második derivált zérushelyeire van szükség, vagyis az

$$f''(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1-x) = 0$$

egyenlet megoldásaira, amelyek $x_5 = 0$ és $x_6 = 1$. A kapott két megoldás három diszjunkt intervallumra bontja az értelmezési tartományt, a valós számegyenest: a $]-\infty, 0[$ intervallumon $f''(x) < 0$, amit például az $x = -1$ behelyettesítésével ellenőrizhetünk: $f''(-1) = -12 < 0$, ezért ezen az intervallumon $f(x)$ konkáv. A $]0, 1[$ intervallumon $f''(x) > 0$, amit például az $x = \frac{1}{2}$ behelyettesítésével ellenőrizhetünk: $f''(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} > 0$, ezért $f(x)$ ezen az intervallumon konvex. Ez azt jelenti, hogy a 0 pontban a második derivált előjelet vált, tehát a 0-ban inflexiós pont van, s a függvényérték $f(0) = 0$. Végül, az $]1, +\infty[$ intervallumon $f''(x) < 0$, amit például az $x = 2$ behelyettesítésével ellenőrizhetünk: $f''(2) = -12 < 0$, ezért ezen az intervallumon $f(x)$ ismét konkáv, tehát az 1 pontban is inflexiós pont van, ahol a függvényérték $f(1) = \frac{1}{2}$.

vii. Grafikon rajzolása:



viii. Az értékkészlet meghatározása: mivel a függvény a $]-\infty, \frac{3}{2}[$ intervallumon nő, a $]\frac{3}{2}, +\infty[$ intervallumon pedig csökken, továbbá $-\infty$-ben és $+\infty$-ben a határértéke $-\infty$, valamint a folytonosság miatt bármely két értéke között minden értéket felvesz, a lokális maximuma egyben abszolút maximum, így az értékkészlete a $]-\infty, \frac{27}{32}]$ intervallum.

Összefoglalva:

D_f	$]-\infty,0[$	0	$]0,1[$	1	$]1,\frac{3}{2}[$	$\frac{3}{2}$	$]\frac{3}{2},+\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow\ \cap$	inflexió	$\nearrow\ \cup$	inflexió	$\nearrow\ \cap$	lok. max.	$\searrow\ \cap$

16. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3}$ függvényen!

Megoldás:

i. Az értelmezési tartomány meghatározása: a függvény a nulla pont kivételével mindenütt értelmezve van a valós egyenesen: $D_f=\mathbb{R}$.

ii. A grafikon és a tengelyek közös pontjainak meghatározása: az x tengellyel való metszéspont az

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^3}=0$$

egyenlet megoldása alapján

$$0=\frac{x^2-1}{x^3},\ \text{ azaz } x^2-1=(x-1)(x+1)=0,$$

amiből $x_1=-1$, vagy $x_2=1$ adódik. Az y tengellyel való metszéspont $f(0)$, de $f(x)$ nincs értelmezve a 0 pontban, így a grafikon nem metszi az y tengelyt.

iii. Szimmetriatulajdonságok vizsgálata: a párosság – páratlanság vizsgálatához az $f(-x)$-et kell kiszámítani:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^3}=\frac{x^2-1}{-x^3}=-\frac{x^2-1}{x^3}=-f(x),$$

tehát a függvény páratlan.

iv. Határértékek az értelmezési tartomány határain: ez most a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben való határérték, illetve a 0 pontban a bal-, és jobboldali határértékek meghatározását jelenti:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}=0,$$

hiszen nyilván mindkét tag határértéke 0, és ugyanez a helyzet $+\infty$-ben is:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}=0.$$

A 0 pontban a baloldali határérték:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-1}{x^3}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^3}\cdot(x^2-1).$$

A zárójelben álló kifejezés határértéke $x\to0$ esetén -1, $\frac{1}{x^3}$ pedig $x<0$ esetén negatív, ezért a határértéke $x\to0$ esetén $-\infty$. Következésképpen, a szorzat határértéke $+\infty$, az ,,előjel-szabály” alapján:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-1}{x^3}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^3}\cdot(x^2-1)=+\infty.$$

A jobboldali határérték esetén hasonló a helyzet, azzal a különbséggel, hogy az $\frac{1}{x^3}$ függvény $x > 0$ esetén pozitív, ezért a határértéke $x \to 0$ esetén $+\infty$, így a szorzat határértéke $-\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} \cdot (x^2-1) = -\infty.$$

v. Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőértékek meghatározása: ehhez kiszámítjuk a függvény deriváltját:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} = \frac{3-x^2}{x^4}.$$

A monotonitási szakaszok felderítéséhez, és a lokális szélsőértékek meghatározásához is a derivált zérushelyeire van szükség, vagyis az

$$f'(x) = \frac{3-x^2}{x^4} = 0, \text{ azaz } 3-x^2 = 0, \text{ azaz } x^2 = 3$$

egyenlet megoldásaira, amelyek $x_3 = -\sqrt{3}$ és $x_4 = \sqrt{3}$. A kapott két megoldás három diszjunkt intervallumra bontja az értelmezési tartományt, a valós számegyenest: a $]-\infty, -\sqrt{3}[$ intervallumon $f'(x) < 0$, amit például az $x = -2$ behelyettesítésével ellenőrizhetünk le: $f'(-2) = -1 < 0$, ezért ezen az intervallumon $f(x)$ szigorúan csökken. A $]-\sqrt{3}, -\sqrt{3}[$ intervallumon $f'(x) > 0$, amit például az $x = 0$ behelyettesítésével ellenőrizhetünk: $f'(0) = 3 > 0$, ezért $f(x)$ szigorúan nő ezen az intervallumon. Ez azt jelenti, hogy a $-\sqrt{3}$ pontban a derivált előjelet vált, negatívból pozitívba, így $-\sqrt{3}$-ban lokális minimum van, értéke: $f(\sqrt{3}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Végül a $]\sqrt{3}, +\infty$ intervallumon $f'(x) < 0$, amit például az $x = 2$ behelyettesítésével ellenőrizhetünk: $f'(2) = -1 < 0$, ezért ezen az intervallumon $f(x)$ szigorúan csökken. Következésképpen, a $\sqrt{3}$ pontban a derivált előjelet vált, tehát ebben a pontban lokális szélsőérték van, s mivel a derivált pozitívból negatívba vált, ez lokális maximum, melynek értéke: $f(\sqrt{3}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

vi. Konvexitás vizsgálata, inflexiós pontok meghatározása: ehhez a második deriváltra van szükség:

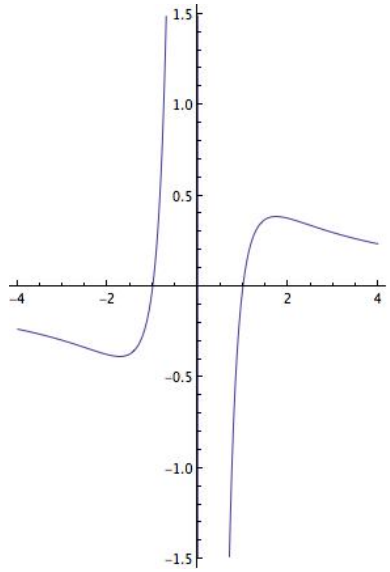
$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{12}{x^5} = \frac{2x^2-12}{x^5}.$$

A konvexitási szakaszok felderítéséhez, és az inflexiós pontok meghatározásához is a második derivált zérushelyeire van szükség, vagyis az

$$f''(x) = \frac{2x^2-12}{x^5} = 0, \text{ azaz } 2x^2-12 = 0, \text{ azaz } x^2 = 6$$

egyenlet megoldásaira, amelyek $x_5 = -\sqrt{6}$ és $x_6 = \sqrt{6}$. A kapott két megoldás ismét három diszjunkt intervallumra bontja az értelmezési tartományt, a valós számegyenest: a $]-\infty, -\sqrt{6}[$ intervallumon $f''(x) < 0$, amit például az $x = -3$ behelyettesítésével ellenőrizhetünk: $f''(-3) = \frac{6}{-3^5} < 0$, ezért ezen az intervallumon $f(x)$ konkáv. A $]-\sqrt{6}, \sqrt{6}[$ intervallumon $f''(x) < 0$, amit például az $x = 1$ behelyettesítésével ellenőrizhetünk: $f''(1) = -10 < 0$, ezért $f(x)$ ezen az intervallumon is konkáv. Ez azt jelenti, hogy a $-\sqrt{6}$ pontban a második derivált nem vált előjelet, tehát a $-\sqrt{6}$-ban nincs inflexiós pont. Végül az $]\sqrt{6}, +\infty[$ intervallumon $f''(x) > 0$, amit például az $x = 3$ behelyettesítésével ellenőrizhetünk: $f''(3) = \frac{6}{3^5} > 0$, ezért ezen az intervallumon $f(x)$ konvex, tehát az $\sqrt{6}$ pontban inflexiós pont van, ahol a függvényérték $f(\sqrt{6}) = \frac{5}{6\sqrt{6}}$.

vii. Grafikon rajzolása:



viii. Az értékkészlet meghatározása: mivel a függvény a $]-\sqrt{3}, 0[$ intervallumon nő, értéke $-\sqrt{3}$-ban negatív, határértéke a 0-ban balról $+\infty$, ezért már ezen az intervallumon minden nemnegatív értéket felvesz. Mivel páratlan függvény, a $]0, \sqrt{3}[$ intervallumon viszont minden nempozitív értéket felvesz, így értékkészlete $\mathbb{R}$.

Összefoglalva:

D_f	$]-\infty, -\sqrt{3}[$	$-\sqrt{3}$	$]-\sqrt{3}, 0[$	0	$]0, \sqrt{3}[$	$\sqrt{3}$	$]\sqrt{3}, +\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	nincs ért.	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	nincs ért.	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$

D_f	$]-\infty, -\sqrt{6}[$	$-\sqrt{6}$	$]-\sqrt{6}, 0[$	0	$]0, \sqrt{6}[$	$\sqrt{6}$	$]\sqrt{6}, +\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	nincs ért.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	infl. pont	$\cup$	nincs ért.	$\cap$	infl. pont	$\cup$

17. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$ függvényen!

Megoldás:

i. Az értelmezési tartomány meghatározása: a függvény mindenütt értelmezve van a valós egyenesen: $D_f = \mathbb{R}$.

ii. A grafikon és a tengelyek közös pontjainak meghatározása: az x tengellyel való metszéspont az

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+4} = 0$$

egyenlet megoldása alapján

$$0 = \frac{x^2}{x^2+4}, \quad \text{azaz} \quad x^2 = 0,$$

amiből $x_1 = 0$ adódik. Az y tengellyel való metszéspont $f(0) = 0$, így a függvénygörbe átmegy az origón.

iii. Szimmetriatulajdonságok vizsgálata: a párosság – páratlanság vizsgálatához az $f(-x)$-et kell kiszámítani:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+4} = \frac{x^2}{x^2+4} = f(x),$$

tehát a függvény páros.

iv. Határértékek az értelmezési tartomány határain: ez most a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben való határérték meghatározását jelenti:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+\frac{4}{x^2}}=1,$$

hiszen $\frac{4}{x^2}$ határértéke nyilván 0, és ugyanez a helyzet $+\infty$-ben is:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{4}{x^2}}=1.$$

v. Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőértékek meghatározása: ehhez kiszámítjuk a függvény deriváltját:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+4)-x^2\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{8x}{(x^2+4)^2}.$$

A monotonitási szakaszok felderítéséhez, és a lokális szélsőértékek meghatározásához is a derivált zérushelyeire van szükség, vagyis az

$$f'(x)=\frac{8x}{(x^2+4)^2}=0,\ \text{azaz}\ 8x=0$$

egyenlet megoldásaira. Egyetlen megoldás van: $x_2=0$. Ez a pont két diszjunkt intervallumra bontja az értelmezési tartományt, a valós számegyenest: a $]-\infty,0[$ intervallumon $f'(x)<0$, hiszen a számláló negatív, a nevező pedig mindig pozitív. Ezért ezen az intervallumon $f(x)$ szigorúan csökken. A $]0,+\infty[$ intervallumon pedig $f'(x)>0$, hiszen a számláló pozitív, a nevező pedig mindig pozitív. Ezért $f(x)$ szigorúan nő ezen az intervallumon. Ez azt jelenti, hogy a 0 pontban a derivált előjelet vált, negatívból pozitívba, így 0-ban lokális minimum van, értéke: $f(0)=0$.

vi. Konvexitás vizsgálata, inflexiós pontok meghatározása: ehhez a második deriváltra van szükség:

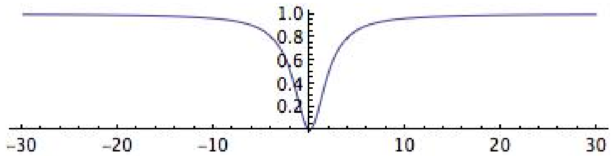
$$f''(x)=\frac{8(x^2+4)^2-8x\cdot 2(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4}=\frac{-24x^2+32}{(x^2+4)^3}.$$

A konvexitási szakaszok felderítéséhez, és az inflexiós pontok meghatározásához is a második derivált zérushelyeire van szükség, vagyis az

$$f''(x)=\frac{-24x^2+32}{(x^2+4)^3}=0,\ \text{azaz}\ -24x^2+32=0,\ \text{azaz}\ x^2=\frac{4}{3}$$

egyenlet megoldásaira, amelyek $x_3=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ és $x_4=\frac{2}{\sqrt{3}}$. A kapott két megoldás három diszjunkt intervallumra bontja az értelmezési tartományt, a valós számegyenest: a $]-\infty,-\frac{2}{\sqrt{3}}[$ intervallumon $f''(x)<0$, amit például az $x=-2$ behelyettesítésével ellenőrizhetünk: $f''(-2)=-\frac{1}{8}<0$, ezért ezen az intervallumon $f(x)$ konkáv. A $]-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}[$ intervallumon $f''(x)>0$, amit például az $x=0$ behelyettesítésével ellenőrizhetünk: $f''(0)>0$, ezért $f(x)$ ezen az intervallumon konvex. Ez azt jelenti, hogy a $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ pontban a második derivált előjelet vált, tehát a $-\frac{2}{\sqrt{3}}$-ban inflexiós pont van, s ott $f(x)$ értéke $f(-\frac{2}{\sqrt{3}})=\frac{1}{4}$. Végül az $]\frac{2}{\sqrt{3}},+\infty[$ intervallumon $f''(x)<0$, amit például az $x=2$ behelyettesítésével ellenőrizhetünk: $f''(2)=-\frac{1}{8}<0$, ezért ezen az intervallumon $f(x)$ konkáv, tehát a $\frac{2}{\sqrt{3}}$ pontban inflexiós pont van, ahol a függvényérték $f(\frac{2}{\sqrt{3}})=\frac{1}{4}$.

vii. Grafikon rajzolása:



viii. Az értékkészlet meghatározása: mivel a függvény a $]-\infty, 0[$ intervallumon csökken, 0-ban nulla, és a $]0, +\infty[$ intervallumon nő, valamint $-\infty$-ben és $+\infty$-ben a határértéke 1, továbbá nyilván

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+4} < 1$$

minden x esetén, így az értékkészlet $R_f = [0, 1[$.

Összefoglalva:

D_f	$]-\infty, 0[$	0	$]0, +\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

D_f	$]-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}[$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$]-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}[$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$]\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cap$	infl. pont	$\cup$	infl. pont	$\cap$