MATEMATIKA I.
Függvények határértéke

1. Határozza meg a következő határértékeket!

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5-4x^7+4)$

   Megoldás: A sorozatokkal kapcsolatban tanultakat itt is alkalmazhatjuk, kisebb módosításokkal. Kiemeljük a legmagasabb hatványt tartalmazó tagot:

   $$\lim_{x\to+\infty}(x^5-4x^7+4)=\lim_{x\to+\infty}x^7\cdot\left(\frac{x^5}{x^7}-4+4\cdot\frac{1}{x^7}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^7\cdot\left(\frac{1}{x^2}-4+4\cdot\frac{1}{x^7}\right).$$

   A zárójelben az x pozitív hatványainak reciprokai nullához tartanak, így a zárójelben levő kifejezés határértéke -4, s ez a kifejezés meg van szorozva a $+\infty$ határértékkel rendelkező x^7 tényezővel, így a szorzat határértéke $-\infty$:

   $$\lim_{x\to+\infty}(x^5-4x^7+4)=-\infty.$$

   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5-4x^7+4)$

   Megoldás: Az előző feladathoz képest annyi a különbség, hogy a kiemelt x^7 tényező tahárértéke $-\infty$-ben $-\infty$, a páratlan kitevő miatt, így a szorzat határértéke $+\infty$ lesz:

   $$\lim_{x\to-\infty}(x^5-4x^7+4)=+\infty.$$

   (c) $\lim\limits_{x\to-1}(x^5-4x^7+4)$

   Megoldás: Az előző feladathoz képest alapvető különbség, hogy a határértéket nem $\pm\infty$-ben, hanem egy véges pontban, a -1-ben vizsgáljuk, ahol a függvény értelmezve van és folytonos, így határértéke a helyettesítési értékével egyezik meg:

   $$\lim_{x\to-1}(x^5-4x^7+4)=(-1)^5-4\cdot(-1)^7+4=7.$$

2. Határozza meg a következő határértékeket!

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{5-x}$

   Megoldás: A számlálóban és a nevezőben is kiemeljük a legmagasabb kitevőjű hatványkifejezést:

   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{5-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}\cdot\frac{4+\frac{1}{x}}{\frac{5}{x}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{1}{x}}{\frac{5}{x}-1}$$

   Az x pozitív hatványainak reciprokai nullához tartanak, így a számláló határértéke 4, a nevezőé pedig -1, ezért:

   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{5-x}=\frac{4}{-1}=-4.$$

(b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{5-x}$

Megoldás: A fentihez hasonlóan járunk el:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{5-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{4+\frac{1}{x}}{\frac{5}{x}-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4+\frac{1}{x}}{\frac{5}{x}-1}$$

Az x pozitív hatványainak reciprokai ismét nullához tartanak, ezen nem változtat, hogy az x változó $+\infty$-hez, vagy $-\infty$-hez tart. Így a számláló határértéke 4, a nevezőé pedig -1, ezért:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{5-x} = \frac{4}{-1} = -4.$$

(c) $\lim_{x\to5^-} \frac{4x+1}{5-x}$

Megoldás: A határértéket az 5 pontban kell meghatározni – pontosabban, a baloldali határértéket, erre utal az $x \to 5^-$ jelölés, az $x \to 5$ helyett. Jegyezzük meg: ez annyit jelent, hogy $x < 5$ – se többet, se kevesebbet. Persze, abból azonnal következik, hogy a tört nevezőjében az $5-x$ kifejezés **mindig** pozitív. Mivel $5-x$ nullához tart, ha x tart 5-höz, így a tört nevezője úgy tart nullához, hogy közben mindig pozitív. Eközben a számláló, mivel folytonos, a helyettesítési értékhez, vagyis $4 \cdot 5 + 1 = 21$-hez tart. A tört számlálója tehát 21-hez van tetszőlegesen közel, tehát pozitív, ha x elég közel van 5-höz, a nevezője pedig nullához, és szintén pozitív. Tehát a tört tetszőlegesen nagy pozitív szám lehet, ha x elég közel van 5-höz, ezért

$$\lim_{x\to5^-} \frac{4x+1}{5-x} = +\infty.$$

(d) $\lim_{x\to5^-} \frac{4x+1}{5-x}$

Megoldás: A határértéket ismét az 5 pontban kell meghatározni – de most a jobboldali határértéket, erre utal az $x \to 5^+$ jelölés. Ez pedig pontosan annyit jelent, hogy $x > 5$, vagyis a nevezőben $5 - x < 0$, negatív. A fenti gondolatmenethez hasonlóan arra jutunk, hogy a tört számlálója ismét 21-hez van tetszőlegesen közel, tehát pozitív, ha x elég közel van 5-höz, a nevezője pedig nullához, viszont mindig negatív. Tehát a tört tetszőlegesen nagy abszolút ŕtékű negatív szám lehet, ha x elég közel van 5-höz, ezért

$$\lim_{x\to5^+} \frac{4x+1}{5-x} = -\infty.$$

Ebből a két feladatból az alábbi általános következtetéseket vonhatjuk le: ha egy tört számlálójának a határértéke egy a pontban **nullától különböző szám**, nevezőjének határértéke pedig nulla, akkor bármelyik oldali határérték csak $\pm\infty$ lehet. A baloldali, illetve jobboldali határérték pontosan akkor létezik, ha $x < a$, illetve $x > a$ esetén az a-hoz elég közeli x-ekre a nevező előjele állandó: vagy mindig pozitív, vagy mindig negatív. Az ilyen x-ekre ugyanis a számláló előjele megegyezik a számláló határértékének – ami nem nulla – az előjelével, tehát a $\pm\infty$ határérték előjele aszerint lesz $+$ vagy $-$, hogy az a-hoz elég közeli x-ekre a számláló és a nevező előjele megegyezik, vagy ellentétes. Végül, a törtnek pontosan akkor létezik határértéke a-ban, ha a baloldali és jobboldali határértékei ebben a pontban léteznek, és egyenlők.

3. Határozza meg a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-4x}{x^2-x-6}$

Megoldás: A végtelenben vett határérték kiszámításakor a sorozatoknál tanultakat alkalmazzuk:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-4x}{x^2-x-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{1-\frac{4x}{x^3}}{1-\frac{x}{x^2}-\frac{6}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}.$$

A zárójelben az x pozitív hatványainak reciprokai nullához tartanak, így a tört határértéke $\frac{1}{1}=1$, s a tört meg van szorozva a $+\infty$ határértékkel rendelkező x tényezővel, így a szorzat határértéke $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-4x}{x^2-x-6} = +\infty.$$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3-4x}{x^2-x-6}$

Megoldás: Itt is a sorozatoknál tanultakat alkalmazzuk, aprócska módosítással:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-4x}{x^2-x-6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} \cdot \frac{1-\frac{4x}{x^3}}{1-\frac{x}{x^2}-\frac{6}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} x \cdot \frac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}.$$

A tört határértéke változatlanul $\frac{1}{1}=1$, de az x szorzótényező ezúttal nem $+\infty$-hez, hanem $-\infty$-hez tart, s ennek megfelelően

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-4x}{x^2-x-6} = -\infty.$$

(c) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3-4x}{x^2-x-6}$

Megoldás: A véges, $a=1$ pontban más a gondolatmenet, ugyanúgy, ahogy a fentiekben láttuk. Az 1 pontban a számláló is, nevező is folytonos, így a határértékük a helyettesítési értékkel egyezik meg. Ha a nevezőben nem nullát kapunk, akkor semmi probléma nincs: a tört határértéke a számláló és a nevező határértékeinek hányadosa. Most ez a helyzet, tehát

$$\lim_{x\to1} \frac{x^3-4x}{x^2-x-6} = \frac{1^3-4\cdot1}{1^2-1-6} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}.$$

(d) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^3-4x}{x^2-x-6}$

Megoldás: Az előző feladatban alkalmazott gondolatmenettel próbálkozunk: a -2 pontban a számláló is, nevező is folytonos, így a határértékük a helyettesítési értékkel egyezik meg. Ha a nevezőben nem nullát kapunk, akkor semmi probléma nincs: a tört határértéke a számláló és a nevező határértékeinek hányadosa. Ám most a nevező helyettesítési értéke: $(-2)^2-(-2)-6=0$, és ez baj, de a fentiekben találkoztunk már ilyen esettel. Számítsuk ki a számláló határértékét(=helyettesítési értékét) is: $(-2)^3-4\cdot(-2)=0$. Ez új helyzet: korábban csak a nevező határértéke volt nulla, s arra az esetre már megvan a stratégiánk. Mi a helyzet, ha a számlálónak és a nevezőnek egyaránt 0 a határértéke az a pontban? Ekkor a számlálóban és a nevezőben egyaránt ki kell emelni az $x-a$ tényezőt, amivel egyszerűsítve megoldódhat a probléma: esetünkben tehát az $x-(-2)=x+2$ tényezőt emeljük ki:

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^3-4x}{x^2-x-6} = \lim_{x\to-2} \frac{x(x^2-4)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to-2} \frac{x(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)}.$$

Mivel $x+2 \neq 0$, hiszen az $x \to -2$ azt jelenti, hogy $x \neq -2$, ezért egyszerűsíthetünk a ,,zavaró", nullához tartó $x+2$-vel:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3-4x}{x^2-x-6} = \lim_{x\to -2} \frac{x(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x(x-2)}{x-3}.$$

Itt pedig már két olyan folytonos függvény hányadosa áll, melynél a nevező határértéke nem nulla, szóval behelyettesíhetünk:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3-4x}{x^2-x-6} = \lim_{x\to -2} \frac{x(x-2)}{x-3} = \frac{(-2)\big((-2)-2\big)}{(-2)-3} = -\frac{8}{5}.$$

Már csak az a kérdés, hogy a fenti szorzattá alakítást hogy végezzük el, másszóval, honnan tudjuk, hogy

$$x^3-4x = x(x-2)(x+2),$$

illetve

$$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)?$$

Az első esetben x-et, mint közös tényezőt kiemelhetünk: $x^3-4x = x(x^2-4)$, majd az x^2-4 kifejezésre az $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosságot alkalmazzuk $a = x$, $b = -2$ választással.

A másik esetben jegyezzük meg, hogy minden olyan másodfokú kifejezés elsőfokú tényezők szorzatává alakíható, melynek van valós gyöke: ha az

$$Ax^2+Bx+C = 0$$

egyenlet gyökei x_1 és x_2, akkor

$$Ax^2+Bx+C = A(x-x_1)(x-x_2).$$

Tehát a megfelelő másodfokú egyenlet gyökeit kell megkeresni. Esetünkben az egyik gyök egészen biztosan $x_1 = a$, hiszen éppen azért 0 a nevező határértéke, mert ha $x = a$, akkor a kifejezés 0! Esetünkben az $x^2-x-6 = 0$ egyenlet két gyöke $x_1 = -2$ és $x_2 = 3$, tehát

$$x^2-x-6 = (x-(-2))(x-3) = (x+2)(x-3).$$

Az alábbi általános következtetéseket vonhatjuk le: ha egy tört számlálójának és nevezőjének a határértéke egy a pontban **egyaránt nulla**, akkor akkor a számlálóból is, és a nevezőből is ki kell emelni az $x-a$ tényezőt, majd ezzel egyszerűsíteni kell. Ezek az úgynevezett ,,nulla per nulla" alakú, *határozatlan alakok*. Ha az egyszerűsítés után még mindig ,,nulla per nulla" alakú a kifejezés, akkor ezt az eljárást kell ismételgetni.

(e) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-4x}{x^2-x-6}$

Megoldás: Az előző feladatokban alkalmazott gondolatmenettel próbálkozunk: behelyettesítünk a számlálóba és a nevezőbe x helyébe 3-at: ekkor a nevező $3^2-3-6 = 0$, ami baj, de az előző feladatban láttuk, hogy ilyenkor a számlálón múlik minden: $3^3-4\cdot 3 = 15 \neq 0$. Ezzel az esettel is találkoztunk már a fentiekben; ilyenkor az egyoldali határértékeket kell megvizsgálni, hogy megtudjuk, milyen előjelű végtelen lesz a határérték, ha egyáltalán létezik. Az előző feladatban már szorzattá alakítottuk a számlálót és a nevezőt, azt most is fel tudjuk használni az előjelek megállapításához. Először vizsgáljuk a baloldali határértéket:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^3-4x}{x^2-x-6} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x(x-2)}{x-3}.$$

Ha $x \to 3^-$, akkor $x < 3$, tehát $x - 3 < 0$, vagyis a nevező negatív. A számlálóban $x > 0$ és $x - 2 > 0$, ha x a 3-hoz tart, és már 2-nél nagyobb. Tehát a számláló pozitív, a nevező pedig negatív a 3-nál kisebb, de 3-hoz közeli x-ekre, így

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x(x-2)}{x-3} = -\infty.$$

A jobboldali határérték esetében hasonlóan okoskodhatunk, de ott $x \to 3^+$ miatt $x > 3$, tehát $x - 3 > 0$, míg a számláló továbbra is pozitív a 3 közelében, így

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x(x-2)}{x-3} = +\infty.$$

Ezért a keresett határérték nem létezik.

(f) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - x - 6}$

Megoldás: Az előző feladatban láttuk, hogy

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x(x-2)}{x-3} = +\infty.$$

4. Határozza meg a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3}$

Megoldás: A végtelenben vett határérték kiszámításakor a sorozatoknál tanultakat alkalmazzuk:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1 - \frac{x}{x^2} - \frac{12}{x^2}}{1 + \frac{2x}{x^2} - \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{12}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}$$

A zárójelben az x pozitív hatványainak reciprokai nullához tartanak, így a tört határértéke $\frac{1}{1} = 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3} = 1.$$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3}$

Megoldás: Az előző feladat lépései itt is alkalmazhatók:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{12}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \frac{x}{x^2} - \frac{12}{x^2}}{1 + \frac{2x}{x^2} - \frac{3}{x^2}}$$

A zárójelben az x pozitív hatványainak reciprokai nullához tartanak, így a tört határértéke $\frac{1}{1} = 1$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3} = 1.$$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3}$

Megoldás: A számláló és a nevező folytonos a 0 pontban, továbbá a nevező nem nulla, így a határérték behelyettesítéssel határozható meg:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3} = \frac{0^2 - 0 - 12}{0^2 + 2 \cdot 0 - 3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

(d) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-x-12}{x^2+2x-3}$

Megoldás: A számláló és a nevező egyaránt nulla a -3 pontban („nulla per nulla” alak!), ezért szorzattá alakítjuk a számlálót is, nevezőt is. A számláló gyökei:

$$x^2 - x - 12 = 0,\ \ x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 12}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases},$$

tehát

$$x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3).$$

Hasonlóan, a nevező gyökei:

$$x^2 + 2x - 3 = 0,\ \ x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases},$$

tehát

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3).$$

Végül tehát

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-x-12}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-4)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to -3} \frac{x-4}{x-1} = \frac{-3-4}{-3-1} = \frac{7}{4}.$$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x-12}{x^2-4x+3}$

Megoldás: Mivel a nevező határértéke nulla, a számlálóé pedig nem nulla, így $\pm\infty$ lehet a határérték. Az előző feladatban már szorzattá alakítottuk a számlálót, most a nevezővel is ezt tesszük, úgy egyszerűbb az előjeleket vizsgálni. A nevező gyökei:

$$x^2 - 4x + 3 = 0,\ \ x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases},$$

ezért

$$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1),$$

tehát

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x-12}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-4)(x+3)}{(x-3)(x-1)}.$$

Először nézzük a baloldali határértéket: ha $x \to 1^-$, akkor $x < 1$, tehát az $x-1$ tényező negatív, s nyilván az $x-3$ tényező is. Így szorzatuk, vagyis a nevező mindig pozitív. A számlálóban viszont $x-4<0$, de az 1 közelében $x+3>0$, ezért a számláló negatív, vagyis a tört negatív:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x-12}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-4)(x+3)}{(x-3)(x-1)} = -\infty.$$

A jobboldali határérték esetében $x \to 1^+$ miatt $x > 1$, és csupán az $x-1$ tényező előjele változik pozitívra, minden más változatlan az 1 közelében, így

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x-12}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-4)(x+3)}{(x-3)(x-1)} = +\infty.$$

Ezért a keresett határérték nem létezik.

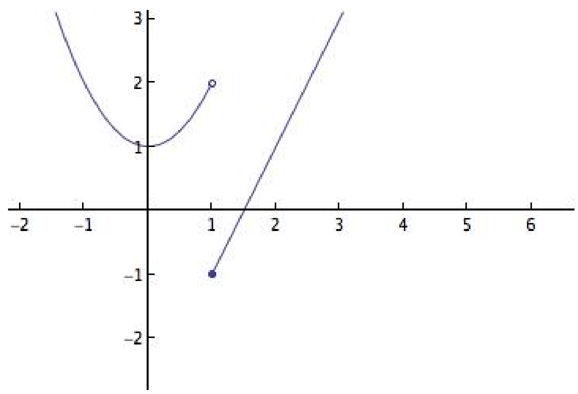
(f) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-x-12}{x^2-4x+3}$

Megoldás: Az előző feladatban láttuk, hogy

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x-12}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-4)(x+3)}{(x-3)(x-1)} = -\infty.$$

5. Ábrázolja a függvényt és határozza meg a következő határértékeket!

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{ha } x \geq 1 \\ x^2+1 & \text{ha } x < 1. \end{cases}$$



(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Megoldás: A $+\infty$-ben vett határérték esetén feltehető, hogy $x \geq 1$, tehát a függvényt értelmező első feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 2x-3 = +\infty.$$

(b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Megoldás: A $-\infty$-ben vett határérték esetén feltehető, hogy $x < 1$, tehát a függvényt értelmező második feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (x^2+1) = +\infty.$$

(c) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

Megoldás: A $+\infty$-ben vett határérték esetén feltehető, hogy $x < 1$, tehát a függvényt értelmező második feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} (x^2+1) = (-3)^2+1 = 10,$$

hiszen a függvény folytonos a -3 pontban.

(d) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Megoldás: Az 1-ben vett jobboldali határérték esetén $x > 1$, tehát a függvényt értelmező első feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x-3) = \lim_{x\to 1}(2x-3) = 2\cdot 1 - 3 = -1,$$

hiszen a $2x-3$ függvény folytonos.

(e) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

Megoldás: Az 1-ben vett baloldali határérték esetén $x < 1$, tehát a függvényt értelmező második feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+1) = \lim_{x\to 1}(x^2+1) = 1^2+1 = 2,$$

hiszen az x^2+1 függvény folytonos.

(f) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Megoldás: A határérték az 1 pontban nem létezik, hiszen az előbb láttuk, hogy az 1 pontban a bal- és jobboldali határértékek különböznek.

(g) $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$

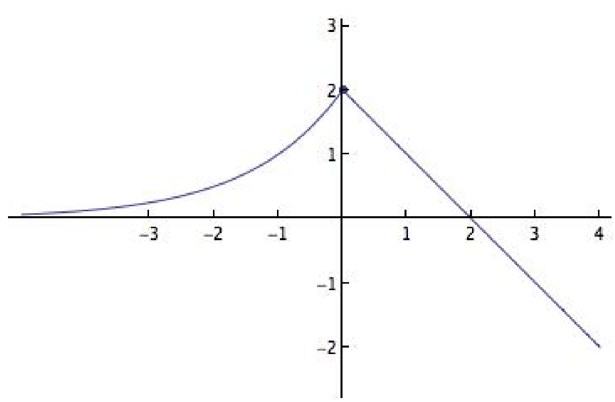
Megoldás: A 7-ben vett határérték esetén feltehető, hogy $x > 1$, tehát a függvényt értelmező első feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to 7}(2x-3) = 2\cdot 7 - 3 = 11,$$

hiszen a $2x-3$ függvény folytonos.

6. Ábrázolja a függvényt és határozza meg a következő határértékeket!

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & \text{ha } x < 0 \\ 2-x & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$



(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Megoldás: A $+\infty$-ben vett határérték esetén feltehető, hogy $x \geq 0$, tehát a függvényt értelmező második feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2 - x = -\infty.$$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Megoldás: A $-\infty$-ben vett határérték esetén feltehető, hogy $x < 0$, tehát a függvényt értelmező első feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2^{x+1} = 0.$$

(c) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$

Megoldás: A -2-ben vett határérték esetén feltehető, hogy $x < 0$, tehát a függvényt értelmező első feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2} 2^{x+1} = 2^{-2+1} = 2^{-1} = \frac{1}{2},$$

hiszen a 2^{x+1} függvény folytonos a -2 pontban.

(d) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

Megoldás: A 0-ban vett jobboldali határérték esetén $x > 0$, tehát a függvényt értelmező második feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (2-x) = \lim_{x\to0}(2-x) = 2 - 0 = 2,$$

hiszen a $2 - x$ függvény folytonos.

(e) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

Megoldás: A 0-ban vett baloldali határérték esetén $x < 0$, tehát a függvényt értelmező első feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} 2^{x+1} = \lim_{x\to0} 2^{x+1} = 2^{0+1} = 2,$$

hiszen az 2^{x+1} függvény folytonos.

(f) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

Megoldás: A határérték az 0 pontban létezik, és egyenlő 2-vel, hiszen a 0 pontban a bal- és jobboldali határértékek egyaránt 2-vel egyenlők.

(g) $\lim\limits_{x\to4} f(x)$

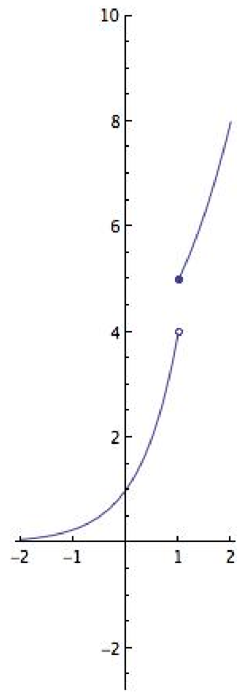
Megoldás: A 4-ben vett határérték esetén feltehető, hogy $x > 0$, tehát a függvényt értelmező második feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x\to4} f(x) = \lim_{x\to4}(2-x) = 2 - 4 = -2,$$

hiszen a $2 - x$ függvény folytonos.

7. Ábrázolja a függvényt és határozza meg a következő határértékeket!

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{ha } x \geq 1 \\ 4^x & \text{ha } x < 1. \end{cases}$$



(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Megoldás: A $+\infty$-ben vett határérték esetén feltehető, hogy $x \geq 1$, tehát a függvényt értelmező első feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 + 4) = +\infty.$$

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Megoldás: A $-\infty$-ben vett határérték esetén feltehető, hogy $x < 1$, tehát a függvényt értelmező második feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 4^x = 0.$$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Megoldás: A 0-ban vett határérték esetén feltehető, hogy $x < 1$, tehát a függvényt értelmező második feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 4^x = 4^0 = 1,$$

hiszen a 4^x függvény folytonos a 0 pontban.

(d) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Megoldás: Az 1-ben vett jobboldali határérték esetén $x > 1$, tehát a függvényt értelmező első feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 + 4 = \lim_{x\to 1}(x^2 + 4) = 1^2 + 4 = 5,$$

hiszen az $x^2 + 4$ függvény folytonos.

(e) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

Megoldás: Az 1-ben vett baloldali határérték esetén $x < 1$, tehát a függvényt értelmező második feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 4^x = \lim_{x\to 1} 4^x = 4^1 = 4,$$

hiszen a 4^x függvény folytonos.

(f) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Megoldás: A határérték az 1 pontban nem létezik, hiszen az 1 pontban a bal- és jobboldali határértékek különbözők.

(g) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

Megoldás: A 4-ben vett határérték esetén feltehető, hogy $x \geq 1$, tehát a függvényt értelmező első feltételt kell figyelembe venni, így nyilván

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}(x^2 + 4) = 4^2 + 4 = 20,$$

hiszen az $x^2 + 4$ függvény folytonos.

8. Határozza meg a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^7 - 8x + 6}{x^2 - x^4 + 6}$

Megoldás: A végtelenben vett határértékeket a sorozatoknál alkalmazott módszerrel számítjuk ki: ,,ránézésre” a számláló fokszáma 7, a nevezőé 4, s a legmagasabb fokú tagok $+\infty$-hez, illetve $-\infty$-hez tartanak, így a határérték $-\infty$. A számítás:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^7 - 8x + 6}{x^2 - x^4 + 6} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^7}{x^4} \cdot \frac{1 - 8 \cdot \frac{x}{x^7} + 6 \cdot \frac{1}{x^7}}{\frac{x^2}{x^4} - 1 + 6 \cdot \frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to +\infty} x^3 \cdot \frac{1 - 8 \cdot \frac{1}{x^6} + 6 \cdot \frac{1}{x^7}}{\frac{1}{x^2} - 1 + 6 \cdot \frac{1}{x^4}} =$$

$$(+\infty) \cdot \frac{1}{-1} = (+\infty) \cdot (-1) = -\infty.$$

(b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 7}{5x^3 + 7x^5 + 2}$

Megoldás: A végtelenben vett határértékeket a sorozatoknál alkalmazott módszerrel számítjuk ki: ,,ránézésre” a számláló fokszáma 4, a nevezőé 5, így a határérték 0. A számítás:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 7}{5x^3 + 7x^5 + 2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^4}{x^5} \cdot \frac{3 + 2 \cdot \frac{x^2}{x^4} - 7 \cdot \frac{1}{x^4}}{5 \cdot \frac{x^3}{x^5} + 7 + 2 \cdot \frac{1}{x^5}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^5} \cdot \frac{3 + 2 \cdot \frac{1}{x^2} - 7 \cdot \frac{1}{x^4}}{5 \cdot \frac{1}{x^2} + 7 + 2 \cdot \frac{1}{x^5}} = 0 \cdot \frac{3}{7} = 0.$$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3-4}{4x^2-7x^3+1}$

Megoldás: A végtelenben vett határértékeket a sorozatoknál alkalmazott módszerrel számítjuk ki: ,,ránézésre" a számláló fokszáma 3, a nevezőé is 3, így a határérték a legmagasabb fokú tagok hányadosa: $\frac{2x^3}{-7x^3} = -\frac{2}{7}$. A számítás:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-4}{4x^2-7x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{2-4\cdot\frac{1}{x^3}}{4\frac{x^2}{x^3}-7+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-4\cdot\frac{1}{x^3}}{4\frac{1}{x}-7+\frac{1}{x^3}} = \frac{2}{-7} = -\frac{2}{7}.$$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x^6+4x}{x^2+5x}$

Megoldás: A végtelenben vett határértékeket a sorozatoknál alkalmazott módszerrel számítjuk ki: ,,ránézésre" a számláló fokszáma 6, a nevezőé 2, s a legmagasabb fokú tagok $+\infty$-hez tartanak, így a határérték $+\infty$. A számítás:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x^6+4x}{x^2+5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^6}{x^2} \cdot \frac{\frac{x^2}{x^6}+3+4\cdot\frac{x}{x^6}}{1+5\cdot\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \frac{\frac{1}{x^4}+3+4\cdot\frac{1}{x^5}}{1+5\cdot\frac{1}{x}} =$$

$$(+\infty)\cdot\frac{3}{5} = +\infty.$$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^3-2x^4+4}{8x^3-5x^4+7}$

Megoldás: A végtelenben vett határértékeket a sorozatoknál alkalmazott módszerrel számítjuk ki: ,,ránézésre" a számláló fokszáma 4, a nevezőé is 4, így a határérték a legmagasabb fokú tagok hányadosa: $\frac{-2x^4}{-5x^4} = \frac{2}{5}$. A számítás:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3-2x^4+4}{8x^3-5x^4+7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{x^4} \cdot \frac{5\cdot\frac{x^3}{x^4}-2+4\cdot\frac{1}{x^4}}{8\cdot\frac{x^3}{x^4}-5+7\cdot\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5\cdot\frac{1}{x}-2+4\cdot\frac{1}{x^4}}{8\cdot\frac{1}{x}-5+7\cdot\frac{1}{x^4}} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}.$$

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^{10}-x}{x-x^3}$

Megoldás: A végtelenben vett határértékeket a sorozatoknál alkalmazott módszerrel számítjuk ki: ,,ránézésre" a számláló fokszáma 10, a nevezőé 3, s a legmagasabb fokú tag a számlálóban és a nevezőben $+\infty$-hez tartanak, ugyanis a nevezőben $-x^3$ a $-\infty$-ben $+\infty$-hez tart! Így a határérték $+\infty$, a számítás pedig:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{10}-x}{x-x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{10}}{x^3} \cdot \frac{1-\frac{x}{x^{10}}}{\frac{x}{x^3}-1} = \lim_{x\to-\infty} x^7 \cdot \frac{1-\frac{1}{x^9}}{\frac{1}{x^2}-1} = (-\infty)\cdot\frac{1}{-1} = (-\infty)\cdot(-1) = +\infty.$$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{3x+\sqrt{4x^2+3}}$

Megoldás: A végtelenben vett határértékeket a sorozatoknál alkalmazott módszerrel számítjuk ki: ,,ránézésre" a számláló fokszáma 1, a nevezőé is 1, így a határérték a legmagasabb fokú tagok hányadosa: $\frac{2x}{3x+\sqrt{4x^2}} = \frac{2x}{3x+2x} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$. A számítás:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{3x+\sqrt{4x^2+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{2+3\cdot\frac{1}{x}}{3+\frac{1}{x}\cdot\sqrt{4x^2+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+3\cdot\frac{1}{x}}{3+\sqrt{\frac{1}{x^2}}\cdot\sqrt{4x^2+3}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2+3\cdot\frac{1}{x}}{3+\sqrt{4+3\cdot\frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{3+\sqrt{4}} = \frac{2}{5}.$$

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^3+x^2+13}}{\sqrt{7x^2+3x+4}}$

Megoldás: A végtelenben vett határértékeket a sorozatoknál alkalmazott módszerrel számítjuk ki: ,,ránézésre” a számláló fokszáma 1, a nevezőé is 1, így a határérték a legmagasabb fokú tagok hányadosa: $\frac{\sqrt[3]{2x^3}}{\sqrt{7x^2}} = \frac{\sqrt[3]{2}x}{\sqrt{7}x} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{7}}$. A számítás:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^3+x^2+13}}{\sqrt{7x^2+3x+4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt[3]{2x^3+x^2+13}}{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{7x^2+3x+4}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}\cdot\sqrt[3]{2x^3+x^2+13}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}}\cdot\sqrt{7x^2+3x+4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{2+\frac{x^2}{x^3}+13\cdot\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{7+3\cdot\frac{x}{x^2}+4\cdot\frac{1}{x^2}}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{2+\frac{1}{x}+13\cdot\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{7+3\cdot\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{x^2}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{7}}.$$

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[5]{7x^6+x^4-5x^2-3}}{4x^2+x-11}$

Megoldás: A végtelenben vett határértékeket a sorozatoknál alkalmazott módszerrel számítjuk ki: ,,ránézésre” a számláló fokszáma $\frac{6}{5}$, a nevezőé 2, ami nagyobb, így a határérték 0. A számítás:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[5]{7x^6+x^4-5x^2-3}}{4x^2+x-11} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{\frac{6}{5}}}{x^2}\cdot\frac{\sqrt[5]{\frac{1}{x^6}}\cdot\sqrt[5]{7x^6+x^4-5x^2-3}}{4+\frac{x}{x^2}-11\cdot\frac{1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\frac{4}{5}}}\cdot\frac{\sqrt[5]{7+\frac{x^4}{x^6}-5\cdot\frac{x^2}{x^6}-3\cdot\frac{1}{x^6}}}{4+\frac{1}{x}-11\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\frac{4}{5}}}\cdot\frac{\sqrt[5]{7+\frac{1}{x^2}-5\cdot\frac{1}{x^4}-3\cdot\frac{1}{x^6}}}{4+\frac{1}{x}-11\cdot\frac{1}{x^2}} = 0\cdot\frac{\sqrt[5]{7}}{4} = 0.$$

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-10x^3-4}{\sqrt[3]{5x^4+8x-9}+6x}$

Megoldás: A végtelenben vett határértékeket a sorozatoknál alkalmazott módszerrel számítjuk ki: ,,ránézésre” a számláló fokszáma 3, a nevezőé $\frac{4}{3}$, ami kisebb, s a számláló határértéke $-\infty$, a nevezőé pedig $+\infty$. Ezért a tört határértéke $-\infty$, a számítás pedig:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-10x^3-4}{\sqrt[3]{5x^4+8x-9}+6x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^{\frac{4}{3}}}\cdot\frac{\frac{x}{x^3}-10-4\cdot\frac{1}{x^3}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^4}}\cdot\sqrt[3]{5x^4+8x-9}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^4}}\cdot 6x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^{\frac{4}{3}}}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}-10-4\cdot\frac{1}{x^3}}{\sqrt[3]{5+8\cdot\frac{x}{x^4}-9\cdot\frac{1}{x^4}}+6x\cdot x^{-\frac{4}{3}}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}-10-4\cdot\frac{1}{x^3}}{\sqrt[3]{5+8\cdot\frac{1}{x^3}-9\cdot\frac{1}{x^4}}+6\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}} = (+\infty)\cdot\frac{-10}{\sqrt[3]{5}} = -\infty.$$

(k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x^2-x-3}{\sqrt{6x^3+5x}+10x^2+5}$

Megoldás: A végtelenben vett határértékeket a sorozatoknál alkalmazott módszerrel számítjuk ki: ,,ránézésre" a számláló fokszáma 2, a nevezőé is 2, így a határérték a legmagasabb fokú tagok hányadosa: $\frac{6x^2}{10x^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. A számítás:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2-x-3}{\sqrt{6x^3+5x}+10x^2+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{6-\frac{x}{x^2}-3\cdot\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}\cdot\sqrt{6x^3+5x}+10+5\cdot\frac{1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6-\frac{1}{x}-3\cdot\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^4}}\cdot\sqrt{6x^3+5x}+10+5\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6-\frac{1}{x}-3\cdot\frac{1}{x^2}}{\sqrt{6\cdot\frac{x^3}{x^4}+5\cdot\frac{x}{x^4}}+10+5\cdot\frac{1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6-\frac{1}{x}-3\cdot\frac{1}{x^2}}{\sqrt{6\cdot\frac{1}{x}+5\cdot\frac{1}{x^3}}+10+5\cdot\frac{1}{x^2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

(l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^4+1}+\sqrt[3]{8x^6+x^2}}{8x^2-11}$

Megoldás: A végtelenben vett határértékeket a sorozatoknál alkalmazott módszerrel számítjuk ki: ,,ránézésre" a számláló fokszáma 2, a nevezőé is 2, így a határérték a legmagasabb fokú tagok hányadosa: $\frac{\sqrt{9x^4}+\sqrt[3]{8x^6}}{8x^2} = \frac{3x^2+2x^2}{8x^2} = \frac{5x^2}{8x^2} = \frac{5}{8}$. A számítás:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^4+1}+\sqrt[3]{8x^6+x^2}}{8x^2-11} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}\cdot\sqrt{9x^4+1}+\frac{1}{x^2}\cdot\sqrt[3]{8x^6+x^2}}{8-11\cdot\frac{1}{x^2}\cdot} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^4}}\cdot\sqrt{9x^4+1}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}}\cdot\sqrt[3]{8x^6+x^2}}{8-11\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9+\frac{1}{x^4}}+\sqrt[3]{8+\frac{x^2}{x^6}}}{8-11\cdot\frac{1}{x^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{9}+\sqrt[3]{8}}{8} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}.$$

(m) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[5]{32x^6+x^4+13x}}{\sqrt[3]{8x^4+3x^3+7x+12}}$

Megoldás: A végtelenben vett határértékeket a sorozatoknál alkalmazott módszerrel számítjuk ki: ,,ránézésre" a számláló fokszáma $\frac{6}{5} = \frac{18}{15}$, a nevezőé $\frac{4}{3} = \frac{20}{15}$, ami nagyobb, így a határérték 0. A számításhoz most más utat választunk: a számlálót és a nevezőt egyaránt átírjuk $\sqrt[15]{\ldots}$ gyököt tartalmazó kifejezésekre: ehhez az $\sqrt[5]{\ldots}$ alatti kifejezést 3-dik hatványra, a $\sqrt[3]{\ldots}$ alatti kifejezést 5-dik hatványra kell emelni:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[5]{32x^6+x^4+13x}}{\sqrt[3]{8x^4+3x^3+7x+12}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[15]{(32x^6+x^4+13x)^3}}{\sqrt[15]{(8x^4+3x^3+7x+12)^5}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[15]{\frac{(32x^6+x^4+13x)^3}{(8x^4+3x^3+7x+12)^5}} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[15]{\frac{(32x^6)^3\cdot(1+\frac{x^4}{32x^6}+\frac{13x}{32x^6})^3}{(8x^4)^5\cdot(1+\frac{3x^3}{8x^4}+\frac{7x}{8x^4}+\frac{12}{8x^4})^5}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[15]{\frac{32^3}{8^5}} \cdot \sqrt[15]{\frac{x^{18}}{x^{20}}} \cdot \sqrt[15]{\frac{(1+\frac{x^4}{32x^6}+\frac{13x}{32x^6})^3}{(1+\frac{3x^3}{8x^4}+\frac{7x}{8x^4}+\frac{12}{8x^4})^5}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[15]{\frac{32^3}{8^5}} \cdot \sqrt[15]{\frac{1}{x^2}} \cdot \sqrt[15]{\frac{(1+\frac{x^4}{32x^6}+\frac{13x}{32x^6})^3}{(1+\frac{3x^3}{8x^4}+\frac{7x}{8x^4}+\frac{12}{8x^4})^5}} = \sqrt[15]{\frac{32^3}{8^5}} \cdot 0 \cdot \sqrt[15]{\frac{1}{1}} = 0.$$

9. Határozza meg a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{3-2x}{4x-8}$

Megoldás: A véges a pontban vett határértékek – beleértve az egyoldaliakat is – kiszámításakor a következő stratégiát követhetjük: először megvizsgáljuk, hogy az illető függvény folytonos-e az a pontban. A tanult elemi függvények – pozitív, negatív és törtkitevőjű hatványfüggvények, exponenciális függvények, logaritmusfüggvények, trigonometrikus függvények –, s az ilyenekből az alapműveletek (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) segítségével, valamint összetett függvény képzéssel származtatott függvények értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak. A folytonossági pontokban a függvény határértéke megegyezik helyettesítési értékével. A következő feladatokban a függvények általában nincsenek értelmezve az a pontban: ez a függvényt értelmező képletből kiderül: leggyakrabban 0 van a nevezőben, esetleg a logaritmus változóában, stb. Az alábbi feladatokban olyan törtek szerepelnek, melyeknél a nevező az a pontban 0. Ekkor a fentiekben (ld. 2. feladat) leírtakat alkalmazzuk: ha a számláló nem 0 az a pontban, akkor a határérték (az egyoldali is) csak $\pm\infty$ lehet: az előjelet a fentiekben bemutatott vizsgálattal lehet megállapítani, külön megvizsgálva az a pont baloldalán, illetve jobboldalán az a-hoz közeli pontokban felvett függvényértékek előjelét. Ha a számláló is 0 az a pontban, akkor pedig a számlálóból és a nevezőből is meg kell próbálni kiemelni az $(x-a)$ tényezőt.

Esetünkben a 2 pontban a nevező 0, a számláló pedig -1. Ennek következtében a kérdéses határérték csak valamilyen előjelű végtelen lehet. Mivel baloldali határértékről van szó, az $x < 2$ teljesül: ennek tudatában kell megvizsgálnunk a tört előjelét a 2 ponthoz közeli pontokban. A számláló negatív, hiszen -1-hez tart, a nevezőben pedig $x < 2$ miatt $4x < 8$, tehát szintén negatív. A tört tehát 2-höz közeli pontokban mindig pozitív, így a határérték $+\infty$:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3-2x}{4x-8} = +\infty.$$

(b) $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{8+3x}{6-2x}$

Megoldás: A 3 pontban a nevező 0, a számláló pedig 17. Ennek következtében a kérdéses határérték csak valamilyen előjelű végtelen lehet. Mivel jobboldali határértékről van szó, az $x > 3$ teljesül: ennek tudatában kell megvizsgálnunk a tört előjelét a 3 ponthoz közeli pontokban. A számláló pozitív, hiszen 17-hez tart, a nevezőben pedig $x > 3$ miatt $2x > 6$, tehát $6-2x$ negatív. A tört tehát 3-hoz közeli pontokban mindig negatív, így a határérték $-\infty$:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{8+3x}{6-2x} = -\infty.$$

(c) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{3x-2}{\ln x}$

Megoldás: Az 1 pontban a nevező 0, a számláló pedig 1. Ennek következtében a kérdéses határérték csak valamilyen előjelű végtelen lehet. Mivel jobboldali határértékről van szó, az $x > 1$ teljesül: ennek tudatában kell megvizsgálnunk a tört előjelét az 1 ponthoz közeli pontokban. A számláló pozitív, hiszen 1-hez tart, a nevezőben pedig $x > 1$ miatt $\ln x > 0$, tehát a nevező pozitív. A tört tehát 1-hez közeli pontokban mindig pozitív, így a határérték $+\infty$:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{3x-2}{\ln x} = +\infty.$$

(d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{3x^2+\sqrt{x}}{\ln x}$

Megoldás: Az 1 pontban a nevező 0, a számláló pedig 4. Ennek következtében a kérdéses határérték csak valamilyen előjelű végtelen lehet. Mivel baloldali határértékről van szó, az $x < 1$ teljesül: ennek tudatában kell megvizsgálnunk a tört előjelét az 1 ponthoz közeli pontokban. A számláló pozitív, hiszen 4-hez tart, a nevezőben pedig $x < 1$ miatt $\ln x < 0$, tehát a nevező negatív. A tört tehát 1-hez közeli pontokban mindig negatív, így a határérték $-\infty$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3x^2+\sqrt{x}}{\ln x} = -\infty.$$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-2}{\sin x}$

Megoldás: A 0 pontban a nevező 0, a számláló pedig -2. Ennek következtében a kérdéses határérték csak valamilyen előjelű végtelen lehet. Mivel jobboldali határértékről van szó, az $x > 0$ teljesül: ennek tudatában kell megvizsgálnunk a tört előjelét a 0 ponthoz közeli pontokban. A számláló negatív, a nevezőben pedig $x > 0$ miatt $\sin x > 0$ (idézzük fel a $\sin x$ függvény képét a 0 pont jobboldalán a 0-hoz közeli pontokban!), tehát a nevező pozitív. A tört tehát 1-hez közeli pontokban mindig negatív, így a határérték $-\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-2}{\sin x} = -\infty.$$

(f) $\lim\limits_{x\to -4^-} \frac{1-x}{(x+4)^2}$

Megoldás: A -4 pontban a nevező 0, a számláló pedig 5. Ennek következtében a kérdéses határérték csak valamilyen előjelű végtelen lehet. Mivel baloldali határértékről van szó, az $x < -4$ teljesül: ennek tudatában kell megvizsgálnunk a tört előjelét a -4 ponthoz közeli pontokban. A számláló pozitív, hiszen a határértéke 5, a nevező viszont mindig pozitív, hiszen egy 0-tól különböző valós szám négyzete (0 nem lehet, hiszen $x \to 4^-$ azt jelenti, hogy $x < -4$, tehát $x + 4 < 0$!). A tört tehát -4-hez közeli pontokban mindig pozitív, így a határérték $+\infty$:

$$\lim_{x\to -4^-} \frac{1-x}{(x+4)^2} = +\infty.$$

(g) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{2-x}{(x-3)^2}$

Megoldás: A 3 pontban a nevező 0, a számláló pedig -1. Ennek következtében a kérdéses határérték csak valamilyen előjelű végtelen lehet. Mivel jobboldali határértékről van szó, az $x > 3$ teljesül: ennek tudatában kell megvizsgálnunk a tört előjelét a 3 ponthoz közeli pontokban. A számláló negatív, hiszen a határértéke -1, a nevező viszont mindig pozitív, hiszen egy 0-tól különböző valós szám négyzete (0 nem lehet, hiszen $x \to 3^+$ azt jelenti, hogy $x > 3$, tehát $x - 3 > 0$!). A tört tehát 3-hoz közeli pontokban mindig negatív, így a határérték $-\infty$:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2-x}{(x-3)^2} = -\infty.$$

(h) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{4x+3}{(x+2)^2}$

Megoldás: A -2 pontban a nevező 0, a számláló pedig -5. Ennek következtében a kérdéses határérték csak valamilyen előjelű végtelen lehet. Meg kell vizsgálnunk a tört előjelét a -2 ponthoz közeli pontokban. A számláló negatív, hiszen a határértéke -5, a nevező viszont mindig pozitív, hiszen egy 0-tól különböző valós szám négyzete (0 nem lehet, hiszen $x \to -2$ azt jelenti, hogy $x \neq -2$, tehát $x + 2 \neq 0$!). A tört tehát -2-höz közeli pontokban mindig negatív, így a határérték $-\infty$:

$$\lim_{x\to -2} \frac{4x+3}{(x+2)^2} = -\infty.$$

(i) $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{5-x}{(x+1)^3}$

Megoldás: A -1 pontban a nevező 0, a számláló pedig 6. Ennek következtében a kérdéses határérték csak valamilyen előjelű végtelen lehet. Mivel baloldali határértékről van szó, az $x < -1$ teljesül: ennek tudatában kell megvizsgálnunk a tört előjelét a -1 ponthoz közeli pontokban. A számláló pozitív, hiszen a határértéke 6. A nevező viszont negatív, mert $x < -1$, tehát $x + 1 < 0$. A tört tehát -1-hez közeli pontokban mindig negatív, így a határérték $-\infty$:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{5-x}{(x+1)^3} = -\infty.$$

(j) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{8}{\cos x}$

Megoldás: A $\frac{\pi}{2}$ pontban a nevező 0, a számláló pedig 8. Ennek következtében a kérdéses határérték csak valamilyen előjelű végtelen lehet. Meg kell vizsgálnunk a tört előjelét a $\frac{\pi}{2}$ ponthoz közeli pontokban. A számláló pozitív, hiszen a határértéke 8, a nevezőben pedig $x \to (\frac{\pi}{2})^-$ miatt $x < \frac{\pi}{2}$. A $\cos x$ függvény görbéje a $\frac{\pi}{2}$ baloldalán a $\frac{\pi}{2}$-közelében pozitív, a tört tehát a $\frac{\pi}{2}$-höz közeli pontokban mindig pozitív, így a határérték $+\infty$:

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{8}{\cos x} = +\infty.$$

(k) $\lim\limits_{x\to -5} \frac{3+x}{(x+5)^3}$

Megoldás: A -5 pontban a nevező 0, a számláló pedig -2. Ennek következtében a kérdéses határérték csak valamilyen előjelű végtelen lehet. Meg kell vizsgálnunk a tört előjelét a -5 ponthoz közeli pontokban. A számláló negatív, hiszen a határértéke -2, a nevező pedig negatív, ha $x < -5$, pozitív ha $x > -5$. Ez azt jelenti, hogy a tört a -5-nél kisebb pontokban pozitív, tehát a baloldali határérték $+\infty$, a -5-nél nagyobb, de -5-höz közeli pontokban pedig negatív, így a jobboldali hat'arérték $-\infty$. Ezért a határérték nem létezik.

(l) $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{-2x+1}{x^2-3x-4}$

Megoldás: A 4 pontban a nevező 0, a számláló pedig -7. Ennek következtében a kérdéses határérték csak valamilyen előjelű végtelen lehet. Meg kell vizsgálnunk a tört előjelét a -5 ponthoz közeli pontokban. A számláló negatív, hiszen a határértéke -7. A nevező előjelét a legegyszerűbben úgy vizsgálhatjuk, ha szorzattá alakítjuk, mégpedig a másodfokú egyenlet megoldóképlete segítségével. Ez a későbbiekben is hasznos lesz: az

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

egyenlet két gyöke a megoldóképletből:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1. \end{cases}$$

Ezért $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x-(-1)) = (x-4)(x+1)$. Tehát a vizsgált tört

$$\frac{-2x+1}{x^2-3x-4} = \frac{-2x+1}{(x-4)(x+1)}.$$

Megállapítottuk, hogy ha $x \to 4^-$, akkor a számláló -7-hez tart, tehát negatív. Mivel $x < 4$, de x a 4-hez közel van, ezért a nevezőben $x - 4 < 0$, $x + 1 > 0$, tehát a nevező is negatív, így a tört pozitív, s a határérték $+\infty$:

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{-2x+1}{x^2-3x-4} = +\infty.$$

(m) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{3-x^2}{2x^2-3x-2}$

Megoldás: A 2 pontban a nevező 0, a számláló pedig -1. Ennek következtében a kérdéses határérték csak valamilyen előjelű végtelen lehet. Meg kell vizsgálnunk a tört előjelét a 2 ponthoz közeli pontokban. A számláló negatív, hiszen a határértéke -1. A nevezőt szorzattá alakítjuk: a

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

egyenlet két gyöke a megoldóképletből:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ezért $2x^2 - 3x - 2 = 2(x-2)(x-(-\frac{1}{2})) = 2(x-2)(x+\frac{1}{2})$. Tehát a vizsgált tört

$$\frac{3-x^2}{2x^2-3x-2} = \frac{3-x^2}{2(x-2)(x+\frac{1}{2})}.$$

Megállapítottuk, hogy ha $x \to 2^+$, akkor a számláló -1-hez tart, tehát negatív. Mivel $x > 2$, de x a 2-höz közel van, ezért a nevezőben $x - 2 > 0$, $x + \frac{1}{2} > 0$, tehát a nevező pozitív, így a tört negatív, s a határérték $-\infty$:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3-x^2}{2x^2-3x-2} = -\infty.$$

(n) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2+3x}{x^2-2x-3}$

Megoldás: A -1 pontban a nevező 0, a számláló pedig -1. Ennek következtében a kérdéses határérték csak valamilyen előjelű végtelen lehet. Meg kell vizsgálnunk a tört előjelét a -1

ponthoz közeli pontokban. A számláló negatív, hiszen a határértéke -1. A nevezőt szorzattá alakítjuk: a

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

egyenlet két gyöke a megoldóképletből:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1. \end{cases}$$

Ezért $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x-(-1)) = (x-3)(x+1)$. Tehát a vizsgált tört

$$\frac{2+3x}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2+3x}{(x-3)(x+1)}.$$

Megállapítottuk, hogy ha $x \to -1$, akkor a számláló -1-hez tart, tehát negatív. Ha $x < -1$, de x a -1-hez közel van, akkor a nevezőben $x+1 < 0$ és $x - 3 < 0$, tehát a nevező pozitív, így a tört negatív. Ezért a baloldali határérték $-\infty$. Másrészt, ha $x > -1$, de x a -1-hez közel van, akkor a nevezőben $x + 1 > 0$ és $x - 3 < 0$, tehát a nevező negatív, így a tört pozitív. Ezért a jobboldali határérték $+\infty$, amiből az következik, hogy a határérték nem létezik.

10. Határozza meg a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{7}{3 \sin x}$

Megoldás: A 0 pontban a nevező 0, a számláló pedig 7. Ennek következtében a kérdéses határérték csak valamilyen előjelű végtelen lehet. Meg kell vizsgálnunk a tört előjelét a 0 ponthoz közeli pontokban. A számláló pozitív, hiszen a határértéke 7. Mivel $x \to 0^+$, ezért $x > 0$, s a $\sin x$ függvény a 0-nál nagyobb, de 0-hoz közeli pontokban pozitív, ezért a nevező is, s így a tört is pozitív, a keresett jobboldali határérték pedig $+\infty$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{7}{3 \sin x} = +\infty.$$

(b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{3}{-2 \sin x}$

Megoldás: Az előző feladathoz képest csak annyi a különbség, hogy a tört nevezője a 0-nál nagyobb, de 0-hoz közeli pontokban negatív, ezért a nevező is, s így a tört is negatív, s a keresett jobboldali határérték $-\infty$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{-2 \sin x} = -\infty.$$

(c) $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{-1}{-3 \cos x}$

Megoldás: Az előző feladathoz képest csak annyi a különbség, hogy a tört nevezőjében a $\cos x$ függvény szerepel, ami a $\frac{\pi}{2}$-nél nagyobb, de $\frac{\pi}{2}$-höz közeli pontokban negatív, viszont negatív előjellel szerepel, így a nevező pozitív, a számláló mindig negatív, s így a tört is negatív, s a keresett jobboldali határérték $-\infty$:

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{-1}{-3 \cos x} = -\infty.$$

(d) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1}{\ln(x-1)}$

Megoldás: A számláló mindig pozitív, a nevező pedig a 2 pontban 0. Mivel $x \to 2^-$, ezért $x < 2$, és $x - 1 < 1$, tehát $\ln(x-1) < 0$. A 2 ponthoz közeli, de 2-nél kisebb pontokban tehát a tört negatív, így

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1}{\ln(x-1)} = -\infty.$$

(e) $\lim_{x\to -2^+} \frac{x+5}{\ln(x+3)}$

Megoldás: A nevező a -2 pontban 0, a számláló pedig 3. Mivel $x \to -2^+$, ezért $x > -2$, és $x+3 > 1$, tehát $\ln(x+3) > 0$. A -2 ponthoz közeli, de -2-nél nagyobb pontokban tehát a tört pozitív, így

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x+5}{\ln(x+3)} = +\infty.$$

(f) $\lim_{x\to 0^+} \frac{4x+1}{2e^x-2}$

Megoldás: A nevező a 0 pontban 0, a számláló pedig 1. Mivel $x \to 0^+$, ezért $x > 0$, és $e^x > 1$, tehát $2e^x - 2 > 0$. A 0 ponthoz közeli, de 0-nál nagyobb pontokban tehát a tört pozitív, így

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4x+1}{2e^x-2} = +\infty.$$

(g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{7}{1-2^x}$

Megoldás: A nevező a 0 pontban 0, a számláló pedig 7. Mivel $x \to 0^+$, ezért $x > 0$, és $2^x > 1$, tehát $1 - 2^x < 0$. A 0 ponthoz közeli, de 0-nál nagyobb pontokban tehát a tört negatív, így

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{7}{1-2^x} = -\infty.$$

(h) $\lim_{x\to 25^-} \frac{7-e^x}{\sqrt{x}-5}$

Megoldás: A nevező a 25 pontban 0, a számláló pedig egy hatalmas (abszolút értékű) negatív szám..... Mivel $x \to 25^-$, ezért $x < 25$, és $\sqrt{x} < 5$, tehát $\sqrt{x} - 5 < 0$. A 0 ponthoz közeli, de 0-nál nagyobb pontokban tehát a tört pozitív, így

$$\lim_{x\to 25^-} \frac{7-e^x}{\sqrt{x}-5} = +\infty.$$

(i) $\lim_{x\to 3^+} \frac{2-x^3}{\sqrt{x-3}}$

Megoldás: A nevező a 3 pontban 0, a számláló pedig -25. Mivel a négyzetgyök függvény értéke nem lehet negatív, ezért a 3 ponthoz közeli, de 3-nál nagyobb pontokban a tört negatív, így

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2-x^3}{\sqrt{x-3}} = -\infty.$$

11. Határozza meg a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x^2-x-6}$

Megoldás: A -2 pontban a nevező határértéke 0, de most a számlálóé is 0. Ilyenkor szorzattá kell alakítani a számlálót és a nevezőt, pontosabban az $x-(-2)=x+2$ tényezőt ki kell emelni. A számláló $x^2+2x=x(x+2)$, a nevezőt pedig a másodfokú kifejezés gyökei segítségével alakítjuk szorzattá, ahogy a fentiekben láttuk: az

$$x^2-x-6=0$$

egyenlet gyökei:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 6}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}=\begin{cases}3\\-2.\end{cases}$$

Ezért $x^2-x-6=(x-3)(x-(-2))=(x-3)(x+2)$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{x^2-x-6}=\lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)}{(x-3)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x}{x-3}.$$

Az egyszerűsítés elvégezhető, hiszen $x\to -2$ miatt $x\neq -2$, így $x+2\neq 0$. Végül az utolsó tört folytonos a -2 pontban, így határértéke behelyettesítéssel kapható:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{x^2-x-6}=\lim_{x\to -2}\frac{x}{x-3}=\frac{-2}{-2-3}=\frac{2}{5}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-3x^2}{x^2+3x-18}$

Megoldás: A 3 pontban a számláló és a nevező határértéke egyaránt 0, így az előző feladat megoldását követjük, szorzattá alakítunk. A számláló

$$x^3-3x^2=x^2(x-3),$$

a nevezőt pedig a másodfokú kifejezés gyökei segítségével alakítjuk szorzattá, ahogy a fentiekben láttuk: az

$$x^2+3x-18=0$$

egyenlet gyökei:

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+4\cdot 18}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{-3\pm 9}{2}=\begin{cases}3\\-6.\end{cases}$$

Ezért $x^2+3x-18=(x-3)(x-(-6))=(x-3)(x+6)$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2}{x^2+3x-18}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2(x-3)}{(x-3)(x+6)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2}{x+6}.$$

Az egyszerűsítés elvégezhető, hiszen $x\to 3$ miatt $x\neq 3$, így $x-3\neq 0$. Végül az utolsó tört folytonos a 3 pontban, így határértéke behelyettesítéssel kapható:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2}{x^2+3x-18}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2}{x+6}=\frac{3^2}{3+6}=1.$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-3x^2}{x^2+3x-18}$

Megoldás: A 0 pontban a nevező -18, ami nem nulla, így a függvény folytonos 0-ban, és így határértéke megegyezik helyettesítési értékével:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x^2}{x^2+3x-18} = \frac{0^3-3\cdot 0^2}{0^2+3\cdot 0-18} = \frac{0}{-18} = 0.$$

(d) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2x-8}{x^2-2x-8}$

Megoldás: A 4 pontban a nevező 0, de a számláló is, így szorzattá alakítunk. A számlálót

$$2x-8 = 2(x-4)$$

módon, a nevezőt pedig a fenti módszerrel. Az

$$x^2-2x-8=0$$

másodfokú egyenlet gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+4\cdot 8}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{2\pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2. \end{cases}$$

Ezért

$$x^2-2x-8 = (x-4)(x+2),$$

tehát

$$\lim_{x\to 4} \frac{2x-8}{x^2-2x-8} = \lim_{x\to 4} \frac{2(x-4)}{(x-4)(x+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{2}{x+2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(e) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2x^2-7x-4}{x^2-4x}$

Megoldás: A 4 pontban a nevező 0, de a számláló is, így szorzattá alakítunk. A nevezőt

$$x^2-4x = x(x-4)$$

módon, a számlálót pedig a fenti módszerrel. Az

$$2x^2-7x-4=0$$

másodfokú egyenlet gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{7\pm\sqrt{49+4\cdot 4\cdot 2}}{4} = \frac{7\pm\sqrt{49+32}}{4} = \frac{7\pm\sqrt{81}}{4} = \frac{7\pm 9}{4} = \begin{cases} 4 \\ -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ezért

$$2x^2-7x-4 = 2(x-4)\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

tehát

$$\lim_{x\to 4} \frac{2x^2-7x-4}{x^2-4x} = \lim_{x\to 4} \frac{2(x-4)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x} = \frac{2\left(4+\frac{1}{2}\right)}{4} = \frac{9}{4}.$$

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x^2-x+3}$

Megoldás: Az 1 pontban a nevező 3, ami nem nulla, így a függvény folytonos 1-ben, és így határértéke megegyezik helyettesítési értékével:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x^2-x+3} = \frac{1^2-4}{1^2-1+3} = \frac{-3}{3} = -1.$$

(g) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{7x-x^2-10}{x^2-25}$

Megoldás: Az 5 pontban a nevező 0, de a számláló is, így szorzattá alakítunk. A nevező:

$$x^2-25 = x^2-5^2 = (x-5)(x+5),$$

az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ azonosság alapján, $a=x, b=5$ választással. A számlálót pedig a fenti módszerrel: a

$$7x-x^2-10 = -x^2+7x-10 = 0$$

másodfokú egyenlet gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{49-4\cdot(-1)\cdot(-10)}}{-2} = \frac{-7\pm\sqrt{49-40}}{-2} = \frac{-7\pm\sqrt{9}}{-2} = \frac{-7\pm 3}{-2} = \begin{cases} 2 \\ 5. \end{cases}$$

Ezért

$$7x-x^2-10 = -x^2+7x-10 = -(x-2)(x-5),$$

tehát

$$\lim_{x\to 5} \frac{7x-x^2-10}{x^2-25} = \lim_{x\to 5} \frac{-(x-2)(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to 5} \frac{-(x-2)}{x+5} = \frac{-5+2}{5+5} == \frac{-3}{10} = -\frac{3}{10}.$$

12. Határozza meg a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} 5^x$

Megoldás: Az exponenciális függvény alapja $5>1$, így a határérték $+\infty$-ben $+\infty$.

(b) $\lim\limits_{x\to -\infty} 5^x$

Megoldás: Az exponenciális függvény alapja $5>1$, így a határérték $-\infty$-ben 0.

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} 5^{-x}$

Megoldás: Nyilván $5^{-x} = \frac{1}{5^x} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$. Az exponenciális függvény alapja $0 < \frac{1}{5} < 1$, így a határérték $+\infty$-ben 0.

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty} 5^{-x}$

Megoldás: Nyilván $5^{-x} = \frac{1}{5^x} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$. Az exponenciális függvény alapja $0 < \frac{1}{5} < 1$, így a határérték $-\infty$-ben $+\infty$.

13. Határozza meg a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(7^{-x}+2\cdot 8^{x+1}-42)$

Megoldás: Az egyes tagok határértékei:

$$\lim_{x\to+\infty} 7^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^x = 0, \qquad \left(0<\frac{1}{7}<1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2\cdot 8^{x+1} = \lim_{x\to+\infty} 2\cdot 8^x\cdot 8 = 16\lim_{x\to+\infty} 8^x = 16\cdot(+\infty) = +\infty, \qquad \left(8>1\right)$$

Végül tehát

$$\lim_{x\to+\infty}(7^{-x}+2\cdot 8^{x+1}-42) = 0+(+\infty)-42 = +\infty.$$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(7^{-x}+2\cdot 8^{x+1}-42)$

Megoldás: Az egyes tagok határértékei:

$$\lim_{x\to-\infty} 7^{-x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^x = +\infty, \qquad \left(0<\frac{1}{7}<1\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2\cdot 8^{x+1} = \lim_{x\to-\infty} 2\cdot 8^x\cdot 8 = 16\lim_{x\to-\infty} 8^x = 16\cdot 0 = 0, \qquad \left(8>1\right)$$

Végül tehát

$$\lim_{x\to-\infty}(7^{-x}+2\cdot 8^{x+1}-42) = (+\infty)+0-42 = +\infty.$$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(8+3^{-x}-21^x)$

Megoldás: Az egyes tagok határértékei:

$$\lim_{x\to+\infty} 3^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x = 0, \qquad \left(0<\frac{1}{3}<1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} 21^x = +\infty, \qquad \left(21>1\right)$$

Végül tehát

$$\lim_{x\to+\infty}(8+3^{-x}-21^x) = 8+0+(-\infty) = -\infty.$$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(8+3^{-x}-21^x)$

Megoldás: Az egyes tagok határértékei:

$$\lim_{x\to-\infty} 3^{-x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty, \qquad \left(0<\frac{1}{3}<1\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} 21^x = 0, \qquad \left(21>1\right)$$

Végül tehát

$$\lim_{x\to-\infty}(8+3^{-x}-21^x) = 8+(+\infty)+0 = +\infty.$$

(e) $\lim_{x \to 0}(8 + 3^x - 21^x)$

Megoldás: A függvény folytonos a 0 pontban, így határértéke a helyettesítési értékével egyenlő:

$$\lim_{x \to 0}(8 + 3^x - 21^x) = 8 + 3^0 - 21^0 = 8 + 1 - 1 = 8.$$