MATEMATIKA II.
Lokális szélsőérték

1. Határozza meg az $f(x,y) = e^{4x}\sin 2y$ függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!

   Megoldás: Az elsőrendű parciális derivált függvények:
$$f_x(x,y) = 4e^{4x}\sin 2y, \qquad f_y(x,y) = 2e^{4x}\cos 2y,$$
   a másodrendű parciális derivált függvények:
$$f_{xx}(x,y) = 16e^{4x}\sin 2y, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 8e^{4x}\cos 2y, \qquad f_{yy}(x,y) = -4e^{4x}\sin 2y.$$

2. Határozza meg az $f(x,y) = \sin(2x+3y)$ függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!

   Megoldás: Az elsőrendű parciális derivált függvények:
$$f_x(x,y) = 2\cos(2x+3y), \qquad f_y(x,y) = 3\cos(2x+3y),$$
   a másodrendű parciális derivált függvények:
$$f_{xx}(x,y) = -4\sin(2x+3y), \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -6\sin(2x+3y),$$
$$f_{yy}(x,y) = -9\sin(2x+3y).$$

3. Határozza meg az $f(x,y) = e^{x^2-2y^3}$ függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!

   Megoldás: Az elsőrendű parciális derivált függvények:
$$f_x(x,y) = 2xe^{x^2-2y^3}, \qquad f_y(x,y) = -6y^2e^{x^2-2y^3},$$
   a másodrendű parciális derivált függvények:
$$f_{xx}(x,y) = 2e^{x^2-2y^3} + 2x\cdot 2xe^{x^2-2y^3} = (2+4x^2)e^{x^2-2y^3},$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2x\cdot -6y^2e^{x^2-2y^3} = -12xy^2e^{x^2-2y^3},$$
$$f_{yy}(x,y) = -12ye^{x^2-2y^3} - 6y^2\cdot(-6y^2)e^{x^2-2y^3} = (-12y+36y^4)e^{x^2-2y^3}.$$

4. Határozza meg az $f(x,y) = \ln(2xy+3y^4)$ függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!

   Megoldás: Az elsőrendű parciális derivált függvények:
$$f_x(x,y) = \frac{2y}{2xy+3y^4}, \qquad f_y(x,y) = \frac{2x+12y^3}{2xy+3y^4},$$
   a másodrendű parciális derivált függvények:
$$f_{xx}(x,y) = -\frac{4y^2}{(2xy+3y^4)^2},$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\frac{18y^4}{(2xy+3y^4)^2},$$
$$f_{yy}(x,y) = \frac{2xy^3-36y^6-4x^2}{(2xy+3y^4)^2}.$$

5. Határozza meg az $f(x,y) = x^2e^{xy^2}$ függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!

Megoldás: Az elsőrendű parciális derivált függvények:

$$f_x(x,y) = 2xe^{xy^2} + x^2y^2e^{xy^2} = (2x + x^2y^2)e^{xy^2}, \qquad f_y(x,y) = 2x^3ye^{xy^2},$$

a másodrendű parciális derivált függvények:

$$f_{xx}(x,y) = (2 + 2xy^2)e^{xy^2} + (2xy^2 + x^2y^4)e^{xy^2},$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2x^2ye^{xy^2} + 2xy(2x + x^2y^2)e^{xy^2},$$
$$f_{yy}(x,y) = 2x^3e^{xy^2} + 4x^4y^2e^{xy^2} = (2x^3 + 4x^4y^2)e^{xy^2}.$$

6. Legyen $f(x,y) = x^3y^2 + xy^3 - 8x + y^2$. Számítsa ki az $f_{xxy}(x,y)$ parciális deriváltat!

Megoldás: Lépésenként haladunk:

$$f_x(x,y) = 3x^2y^2 + y^3 - 8,$$

$$f_{xx}(x,y) = 6xy^2,$$
$$f_{xxy}(x,y) = 12xy.$$

7. Határozza meg az $f(x,y) = y^3e^{x^2y}$ kétváltozós függvény $f_{xx}(x,y)$ és $f_{xy}(x,y)$ másodrendű parciális deriváltjait!

Megoldás: Lépésenként haladunk:

$$f_x(x,y) = y^3e^{x^2y} \cdot 2xy = 2xy^4e^{x^2y},$$

s a szorzat differenciálási szabálya alapján x szerint differenciálva:

$$f_{xx}(x,y) = 2y^4e^{x^2y} + 2xy^4 \cdot 2xye^{x^2y} = (2y^4 + 4x^2y^5)e^{x^2y},$$

illetve $f_x(x,y)$-t y szerint differenciálva:

$$f_{xy}(x,y) = 8xy^3e^{x^2y} + 2xy^4 \cdot x^2e^{x^2y} = (8xy^3 + 2x^3y^4)e^{x^2y}.$$

8. Határozza meg az $f(x,y) = y^3e^{x^2y}$ kétváltozós függvény $f_{yx}(x,y)$ és $f_{yy}(x,y)$ másodrendű parciális deriváltjait!

Megoldás: Az $f_{yx}(x,y)$ megegyezik az előző feladatban már kiszámolt $f_{xy}(x,y)$ parciális deriválttal:

$$f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = (8xy^3 + 2x^3y^4)e^{x^2y}$$

hiszen a második parciális deriváltak folytonos függvények, tehát f kétszer folytonosan differenciálható. Az $f_{yy}(x,y)$ kiszámításához először $f_y(x,y)$-t határozzuk meg:

$$f_y(x,y) = 3y^2e^{x^2y} + y^3 \cdot x^2e^{x^2y} = (x^2y^3 + 3y^2)e^{x^2y},$$

s a szorzat differenciálási szabálya alapján ismét y szerint differenciálva:

$$f_{yy}(x,y) = (3x^2y^2 + 6y)e^{x^2y} + (x^2y^3 + 3y^2)(e^{x^2y} \cdot x^2) = (6x^2y^2 + x^4y^3 + 6y)e^{x^2y}.$$

9. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 3y + 1$ kétváltozós függvény stacionárius pontjait!

   Megoldás: Az (a,b) pont akkor stacionárius pont, ha ebben a pontban mindkét elsőrendű parciális derivált nulla:
   $$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0.$$
   A stacionárius pontok meghatározásához tehát az
   $$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 0 \\ f_y(x,y) &= 0 \end{aligned}$$
   két egyenletből álló, két ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert kell megoldani az x, y ismeretlenekre. Esetünkben
   $$f_x(x,y) = 2x - y + 3, \qquad f_y(x,y) = -x + 2y - 3,$$
   tehát a stacionárius pontok egyenletrendszere:
   $$\begin{aligned} 2x - y + 3 &= 0 \\ -x + 2y - 3 &= 0 \end{aligned}$$
   Ha az első egyenlethez hozzáadjuk a második egyenlet kétszeresét, akkor x kiesik, és egy ismeretlen marad, melyre a
   $$3y - 3 = 0, \text{ azaz } 3y = 3$$
   egyenletet kapjuk, amiből $y = 1$ adódik. Ezt visszahelyettesítve a fenti egyenletrendszer második egyenletébe azt kapjuk, hogy
   $$-x + 2 - 3 = 0, \text{ azaz } x = -1.$$
   Tehát egyetlen stacionárius pont van: $(-1, 1)$.

10. Az $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 3y + 1$ kétváltozós függvény stacionárius pontja $(-1,1)$. Döntse el, hogy ez a pont lokális szélsőérték-e, és ha igen, milyen jellegű!

    Megoldás: A stacionárius pontok és a lokális szélsőértékhelyek kapcsolatának vizsgálata a $D(x,y)$ függvény segítségével történhet, melynek definíciója:
    $$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y) \cdot f_{yx}(x,y).$$
    A folytonos másodrendű parciális deriváltakkal rendelkező függvények esetén $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$, így
    $$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2.$$
    Ha (a,b) stacionárius pont és $D(a,b) > 0$, akkor (a,b)-ben lokális szélsőérték van, mégpedig lokális minimum, ha $f_{xx}(a,b) > 0$, és lokális maximum, ha $f_{xx}(a,b) < 0$. Vegyük észre, hogy ebben az esetben $f_{xx}(a,b) \neq 0$, akkor ugyanis – $D(a,b)$ definíciója alapján – a $-f_{xy}(a,b)^2 > 0$, vagyis $f_{xy}(a,b)^2 < 0$ volna, ami nyilván lehetetlen: egy valós szám négyzete nem lehet negatív. Ha $D(a,b) < 0$, akkor az (a,b) pontban nincs lokális szélsőérték, ekkor azt mondjuk, hogy (a,b)-ben a függvénynek nyeregpontja van. Végül $D(a,b) = 0$ esetén ezzel a módszerrel nem tudjuk eldönteni, hogy az (a,b) pontban van-e lokális szélsőérték: lehet is, meg nem is – további vizsgálatokra van szükség.

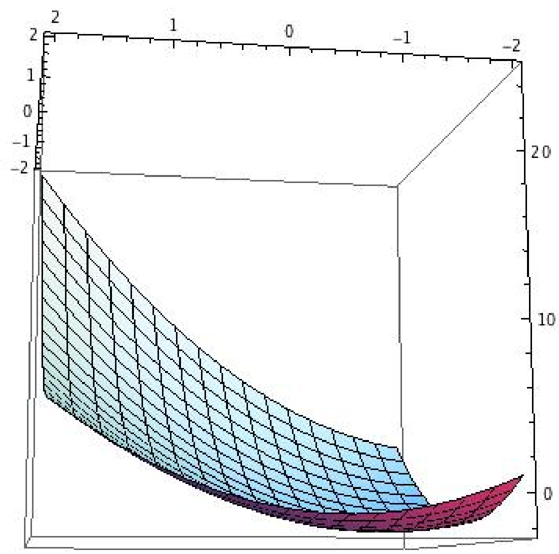
Esetünkben tehát a $D(x,y)$ meghatározásához ki kell számítanunk a második parciális deriváltakat:

$$f_{xx}(x,y) = 2, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -1, \qquad f_{yy}(x,y) = 2,$$

tehát

$$D(x,y) = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 4 - 1 = 3 > 0,$$

függetlenül az (a,b) ponttól. Ezért a $(-1,1)$ stacionárius pontban lokális szélsőérték van, mégpedig $f_{xx}(-1,1) = 2 > 0$ miatt lokális minimum. A lokális minimum értéke $f(-1,1) = -2$.



11. Határozza meg az $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 4x - 5y + 7$ kétváltozós függvény stacionárius pontjait!

Megoldás: A függvény elsőrendű parciális deriváltjai:

$$f_x(x,y) = 4x - y + 4, \qquad f_y(x,y) = -x + 2y - 5,$$

tehát a stacionárius pontok egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} 4x - y + 4 &= 0 \\ -x + 2y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Ha az első egyenlethez hozzáadjuk a második egyenlet négyszeresét, akkor x kiesik, és egy ismeretlen marad, melyre a

$$7y - 16 = 0, \text{ azaz } 7y = 16$$

egyenletet kapjuk, amiből $y = \frac{16}{7}$ adódik. Ezt visszahelyettesítve a fenti egyenletrendszer második egyenletébe azt kapjuk, hogy

$$-x + 2 \cdot \frac{16}{7} - 5 = 0, \text{ azaz } x = 2 \cdot \frac{16}{7} - 5 = -\frac{3}{7}.$$

Tehát egyetlen stacionárius pont van: $(-\frac{3}{7}, \frac{16}{7})$.

12. Az $f(x,y) = -2x^2 - xy + 4x - 3y^2 - 5y + 3$ kétváltozós függvény stacionárius pontja $(\frac{29}{23}, -\frac{24}{23})$ Döntse el, hogy ez a pont lokális szélsőérték-e, és ha igen, milyen jellegű!

Megoldás: A $D(x,y)$ meghatározásához ki kell számítanunk először az első, majd a második parciális deriváltakat:

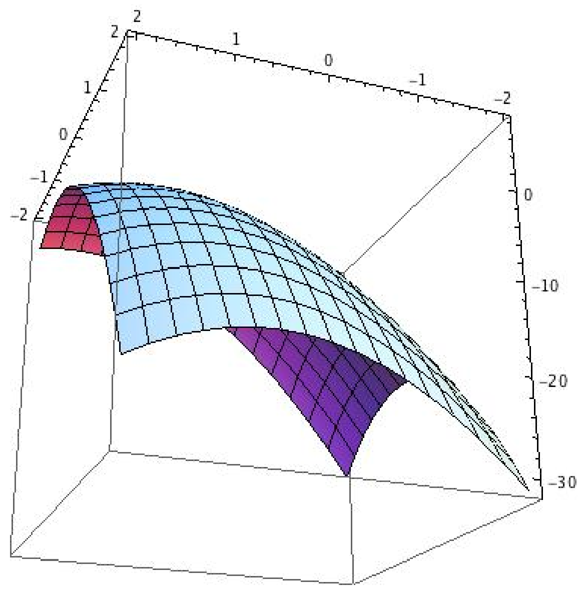
$$f_x(x,y) = -4x - y + 4, \qquad f_y(x,y) = -x - 6y - 5,$$

$$f_{xx}(x,y) = -4, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -1, \qquad f_{yy}(x,y) = -6,$$

tehát

$$D(x,y) = (-4) \cdot (-6) - (-1) \cdot (-1) = 24 - 1 = 23 > 0,$$

függetlenül a stacionárius ponttól. Ezért a $(\frac{29}{23}, -\frac{24}{23})$ stacionárius pontban lokális szélsőérték van, mégpedig $f_{xx}(\frac{29}{23}, -\frac{24}{23}) = -4 < 0$ miatt lokális maximum.



13. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 + xy + 2x + 3y - 1$ kétváltozós függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás: Először a stacionárius helyeket határozzuk meg. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f_x(x,y) = 2x + y + 2, \qquad f_y(x,y) = x + 3,$$

ezért a stacionárius pontok egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} 2x + y + 2 &= 0 \\ x + 3 &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenletből $x = -3$, s az elsőbe visszahelyettesítve

$$2 \cdot (-3) + y + 2 = 0, \text{ azaz } y = 4$$

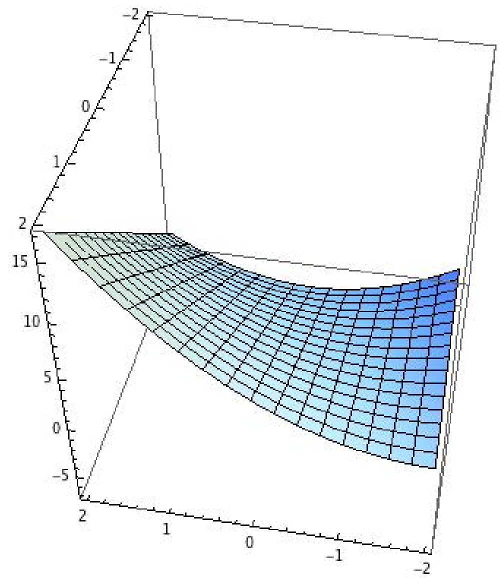
adódik, tehát az egyetlen stacionárius pont $(-3, 4)$. Most megvizsgáljuk a $D(x,y)$ segítségével, hogy ebben a pontban van-e lokális szélsőérték. Ehhez szükségünk van a másodrendű parciális deriváltakra:

$$f_{xx}(x,y) = 2, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 1, \qquad f_{yy}(x,y) = 0,$$

ezért

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = -1,$$

ami a stacionárius ponttól függetlenül mindig negatív, így a függvénynek nincs lokális szélsőértéke.



14. Határozza meg az $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$ kétváltozós függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás: Először a stacionárius helyeket határozzuk meg. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f_x(x,y) = 3x^2 - y, \qquad f_y(x,y) = 2y - x,$$

ezért a stacionárius pontok egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} 3x^2 - y &= 0 \\ 2y - x &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenletből $x = 2y$, s az elsőbe visszahelyettesítve

$$3 \cdot (2y)^2 - y = 0, \text{ azaz } 12y^2 - y = y(12y - 1) = 0$$

adódik, tehát $y_1 = 0$, vagy $y_2 = \frac{1}{12}$. A megfelelő x-értékek $x_1 = 2y_1 = 0$, illetve $x_2 = 2y_2 = \frac{1}{6}$. Tehát két stacionárius pont van: $(0,0)$ és $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$. Most megvizsgáljuk a $D(x,y)$ segítségével, hogy ezekben a pontokban van-e lokális szélsőérték. Ehhez szükségünk van a másodrendű parciális deriváltakra:

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -1, \qquad f_{yy}(x,y) = 2,$$

ezért

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 12x - (-1)^2 = 12x - 1.$$

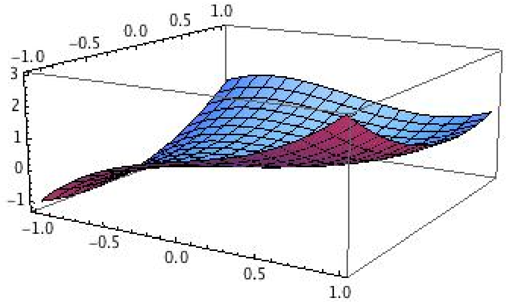
A két stacionárius pontban a következő a helyzet: a $(0,0)$ pontban

$$D(0,0) = 12 \cdot 0 - 1 = -1,$$

ebben a pontban tehát nincs lokális szélsőérték. A másik stacionárius pontban, a $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$-ban

$$D\Big(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\Big) = 12 \cdot \frac{1}{6} = 2 - 1 = 1 > 0,$$

valamint $f_{xx}(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1 > 0$, tehát az $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ pontban a függvénynek lokális minimuma van.



15. Határozza meg hogy hol, és milyen szélsőértéke van az $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 + 2xy + 6$ kétváltozós függvénynek!

Megoldás: Először a stacionárius helyeket határozzuk meg. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f_x(x, y) = 4x + 2y, \qquad f_y(x, y) = 8y + 2x,$$

ezért a stacionárius pontok egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 0 \\ 8y + 2x &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenletből $x = -4y$, s az elsőbe visszahelyettesítve

$$-16y + 2y = 0, \text{ azaz } 14y = 0$$

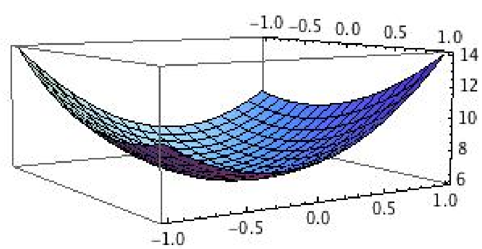
adódik, tehát $0 = 0$, és ezért $x = 0$. Tehát az egyetlen stacionárius pont: $(0, 0)$. Most megvizsgáljuk a $D(x, y)$ segítségével, hogy ebben a pontban van-e lokális szélsőérték. Ehhez szükségünk van a másodrendű parciális deriváltakra:

$$f_{xx}(x, y) = 4, \qquad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 2, \qquad f_{yy}(x, y) = 8,$$

ezért

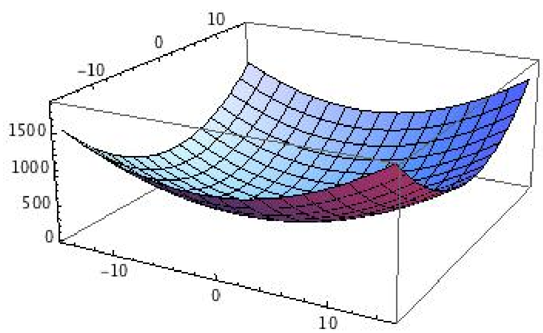
$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 = 4 \cdot 8 - 2 \cdot 2 = 28 > 0.$$

Mivel $D(x, y)$ minden pontban pozitív, ezért a függvénynek van lokális szélsőértéke a $(0, 0)$ stacionárius pontban, s mivel $f_{xx}(0, 0) = 4 > 0$, így ebben a pontban a függvénynek lokális minimuma van, értéke $f(0, 0) = 6$.



16. Határozza meg hogy hol, és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = 3(x+2)^2 + 4(y-1)^2$ kétváltozós függvénynek!

Megoldás: Elöljáróban megjegyezzük, hogy ennek a függvénynek a szélsőértékhelyeit elemi úton is meg lehet határozni. Ugyanis a függvény értékét úgy kapjuk, hogy két valós szám négyzetét pozitív számokkal, 3-mal, illetve 4-gyel megszorozzuk, majd ezeket összeadjuk. A két valós szám négyzete nyilván két nemnegatív szám, melyek csak akkor lehetnek nullák, ha mindkét szám nulla, vagyis ha $x+2=0$ és $y-1=0$. Minden más esetben a függvény pozitív értékeket vesz fel, s mindkét változóban szigorúan nő, így egyetlen lokális szélsőértékhelye az $x=-2$, $y=1$ alapján a $(-2,1)$ pontban van, s ez egy lokális minimum – valójában ez nem csupán lokális minimum, hanem a függvény itt veszi fel legkisebb értékét, a 0-t. A függvény képe itt látható:



Most vizsgáljuk meg, hogy az általános módszer hogyan működik ebben az esetben. Először a stacionárius helyeket határozzuk meg. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f_x(x,y) = 6(x+2), \qquad f_y(x,y) = 8(y-1),$$

ezért a stacionárius pontok egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} 6(x+2) &= 0 \\ 8(y-1) &= 0. \end{aligned}$$

Az első egyenletből $x=-2$, a mśodikból pedig $y=1$ Tehát az egyetlen stacionárius pont: $(-2,1)$. Most megvizsgáljuk a $D(x,y)$ segítségével, hogy ebben a pontban van-e lokális szélsőérték. Ehhez szükségünk van a másodrendű parciális deriváltakra:

$$f_{xx}(x,y) = 6, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0, \qquad f_{yy}(x,y) = 8,$$

ezért

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 6 \cdot 8 - 0 = 48 > 0.$$

Mivel $D(x,y)$ minden pontban pozitív, ezért a függvénynek van lokális szélsőértéke a $(-2,1)$ stacionárius pontban, s mivel $f_{xx}(-2,1) = 6 > 0$, így ebben a pontban a függvénynek lokális minimuma van, értéke $f(-2,1) = 0$.

17. Határozza meg hogy hol, és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = xy - x^3 - y^2$ kétváltozós függvénynek!

Megoldás: Először a stacionárius helyeket határozzuk meg. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f_x(x,y) = y - 3x^2, \qquad f_y(x,y) = x - 2y,$$

ezért a stacionárius pontok egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} y - 3x^2 &= 0 \\ x - 2y &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenletből $x = 2y$, s az elsőbe visszahelyettesítve

$$y - 12y^2 = 0, \ \text{azaz} \ y(1 - 12y) = 0$$

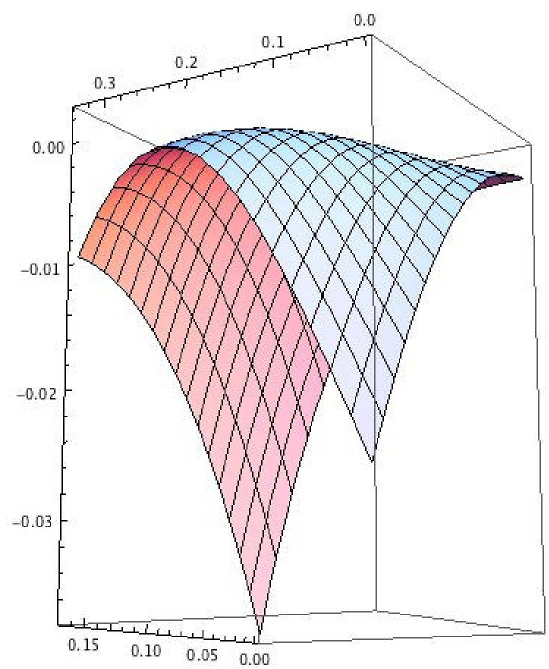
adódik, tehát $y_1 = 0$, vagy $y_2 = \frac{1}{12}$, s a megfelelő x értékek: $x_1 = 0$ és $x_2 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Tehát két stacionárius pont van: $(0, 0)$ és $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$. Most megvizsgáljuk a $D(x, y)$ segítségével, hogy ebben a pontban van-e lokális szélsőérték. Ehhez szükségünk van a másodrendű parciális deriváltakra:

$$f_{xx}(x, y) = -6x, \qquad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 1, \qquad f_{yy}(x, y) = -2,$$

ezért

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 = (-6x) \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = 12x - 1.$$

Most a stacionárius pontokban vizsgáljuk meg $D(x, y)$-t: $D(x_1, y_1) = D(0, 0) = -1 < 0$ tehát ebben a pontban a függvénynek nincs lokális szélsőértéke. A másik stacionárius pontban $D(x_2, y_2) = D(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = 2 - 1 = 1 > 0$, így ebben a pontban a függvénynek van lokális szélsőértéke, s mivel $f_{xx}(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -1 > 0$, így ebben a pontban a függvénynek lokális maximuma van, értéke $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = \frac{1}{432}$.



18. Határozza meg hogy hol, és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = x^3 - 8xy + y^3$ kétváltozós függvénynek!

Megoldás: Először a stacionárius helyeket határozzuk meg. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 8y, \qquad f_y(x,y) = -8x + 3y^2,$$

ezért a stacionárius pontok egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8y &= 0 \\ -8x + 3y^2 &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenletből $x = \frac{3y^2}{8}$, s az elsőbe visszahelyettesítve

$$3 \cdot \left(\frac{3y^2}{8}\right)^2 - 8y = 0, \text{ azaz } \frac{27}{64}y^4 - 8y = y\left(\frac{27}{64}y^3 - 8\right) = 0$$

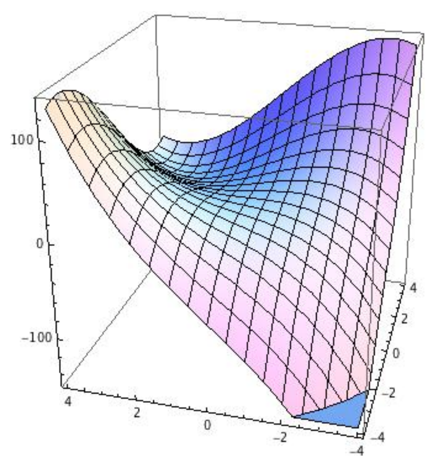
adódik, tehát $y_1 = 0$, vagy $y_2 = \sqrt[3]{8 \cdot \frac{64}{27}} = \frac{8}{3}$, s a megfelelő x értékek: $x_1 = 0$ és $x_2 = \frac{8}{3}$. Tehát két stacionárius pont van: $(0,0)$ és $(\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$. Most megvizsgáljuk a $D(x,y)$ segítségével, hogy ebben a pontban van-e lokális szélsőérték. Ehhez szükségünk van a másodrendű parciális deriváltakra:

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -8, \qquad f_{yy}(x,y) = 6y,$$

ezért

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 6x \cdot 6y - (-8) \cdot (-8) = 36xy - 64.$$

Most a stacionárius pontokban vizsgáljuk meg $D(x,y)$-t: $D(x_1,y_1) = D(0,0) = -64 < 0$ tehát ebben a pontban a függvénynek nincs lokális szélsőértéke. A másik stacionárius pontban $D(x_2,y_2) = D(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}) = 192 > 0$, így ebben a pontban a függvénynek van lokális szélsőértéke, s mivel $f_{xx}(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}) = \frac{48}{3} = 16 > 0$, így ebben a pontban a függvénynek lokális minimuma van, értéke $f(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}) = -\frac{512}{27}$.



19. Határozza meg hogy hol, és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = x^3 - 3xy - y^3$ kétváltozós függvénynek!

Megoldás: Először a stacionárius helyeket határozzuk meg. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y, \qquad f_y(x,y) = -3x - 3y^2,$$

ezért a stacionárius pontok egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ -3x - 3y^2 &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenletből $x = -y^2$, s az elsőbe visszahelyettesítve

$$3 \cdot (-y^2)^2 - 3y = 0, \text{ azaz } 3y^4 - 3y = 3y(y^3 - 1) = 0$$

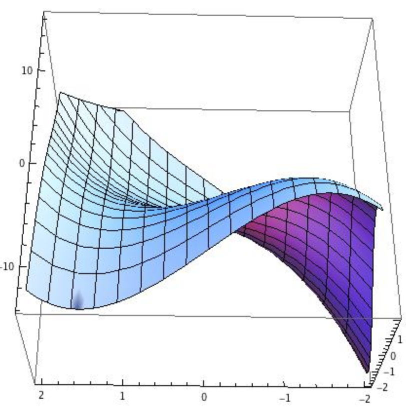
adódik, tehát $y_1 = 0$, vagy $y_2 = 1$, s a megfelelő x értékek: $x_1 = 0$ és $x_2 = -1$. Tehát két stacionárius pont van: $(0,0)$ és $(-1,1)$. Most megvizsgáljuk a $D(x,y)$ segítségével, hogy ebben a pontban van-e lokális szélsőérték. Ehhez szükségünk van a másodrendű parciális deriváltakra:

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -3, \qquad f_{yy}(x,y) = -6y,$$

ezért

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 6x \cdot (-6y) - (-3) \cdot (-3) = -36xy - 9.$$

Most a stacionárius pontokban vizsgáljuk meg $D(x,y)$-t: $D(x_1,y_1) = D(0,0) = -9 < 0$ tehát ebben a pontban a függvénynek nincs lokális szélsőértéke. A másik stacionárius pontban $D(x_2,y_2) = D(-1,1) = 27 > 0$, így ebben a pontban a függvénynek van lokális szélsőértéke, s mivel $f_{xx}(-1,1) = \frac{48}{3} = -6 >< 0$, így ebben a pontban a függvénynek lokális maximuma van, értéke $f(-1,1) = 1$.



Az ábrán láthatjuk, hogy a $(0,0)$ pont nyeregpont: a pontból délnyugat-északkelet irányban mozogva, a ponthoz tetszőlegesen közel találhatók olyan pontok, ahol a függvényérték negatív, tehát kisebb, mint $f(0,0) = 0$, míg a pontból délkelet-északnyugat irányban mozogva, a ponthoz tetszőlegesen közel találhatók olyan pontok, ahol a függvényérték pozitív, tehát nagyobb, mint $f(0,0) = 0$. Ezért a $(0,0)$ pontnak nincs olyan környezete, melyben az $f(0,0) = 0$ lenne a legkisebb, vagy legnagyobb függvényérték.

20. Határozza meg hogy hol, és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = 3x^2 - 30x + y^3 - 6xy - 15y + 8$ kétváltozós függvénynek!

Megoldás: Először a stacionárius helyeket határozzuk meg. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f_x(x,y) = 6x - 30 - 6y, \qquad f_y(x,y) = 3y^2 - 6x - 15,$$

ezért a stacionárius pontok egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} 6x - 30 - 6y &= 0 \\ 3y^2 - 6x - 15 &= 0. \end{aligned}$$

Ha összeadjuk a két egyenletet, akkor x kiesik és a következőt kapjuk:

$$3y^2 - 6y - 45 = 3(y^2 - 2y - 15) = 0, \text{ azaz } y^2 - 2y - 15 = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei:

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 15}}{2},$$

vagyis $y_1 = 5$ és $y_2 = -3$. A megfelelő x értékeket az első egyenletbe való visszahelyettesítéssel kapjuk:

$$x = y + 5,$$

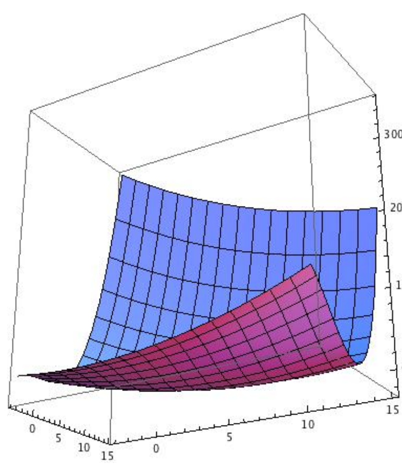
azaz $x_1 = 10$ és $x_2 = 2$. Tehát két stacionárius pont van: $(10, 5)$ és $(2, -3)$. Most megvizsgáljuk a $D(x, y)$ segítségével, hogy ebben a pontban van-e lokális szélsőérték. Ehhez szükségünk van a másodrendű parciális deriváltakra:

$$f_{xx}(x, y) = 6, \qquad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -6, \qquad f_{yy}(x, y) = 6y,$$

ezért

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2 = 6 \cdot 6y - (-6) \cdot (-6) = 36y - 36.$$

Most a stacionárius pontokban vizsgáljuk meg $D(x, y)$-t: $D(x_1, y_1) = D(10, 5) = 144 > 0$ tehát ebben a pontban a függvénynek lokális szélsőértéke van, $f_{xx}(10, 5) = 6 > 0$ miatt lokális minimum, melynek értéke $f(10, 5) = -242$. A másik stacionárius pontban $D(x_2, y_2) = D(2, -3) = -144 < 0$, így ebben a pontban a függvénynek nincs lokális szélsőértéke.



21. Határozza meg hogy hol, és milyen szélsőértéke van az $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$ kétváltozós függvénynek!

Megoldás: A függvény a koordinátatengelyek pontjai kivételével mindenütt értelmezve van. Először a stacionárius helyeket határozzuk meg. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f_x(x, y) = 2x - \frac{2}{x^2 y}, \qquad f_y(x, y) = 2y - \frac{2}{xy^2},$$

ezért a stacionárius pontok egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} 2x - \frac{2}{x^2 y} &= 0 \\ 2y - \frac{2}{x y^2} &= 0. \end{aligned}$$

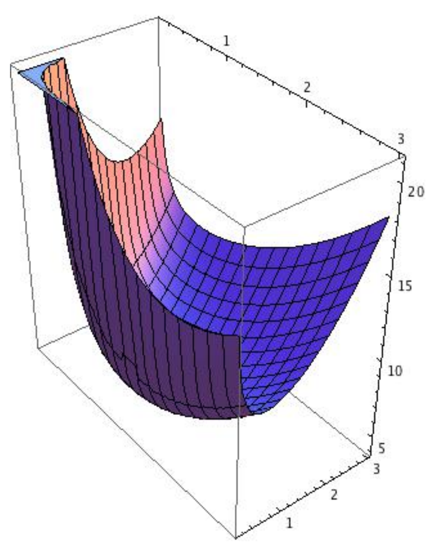
Átrendezve és 2-vel elosztva az egyenleteket azt kapjuk, hogy $x^3 = \frac{1}{y}$ és $y^3 = \frac{1}{x}$. Visszahelyettesítve az egyenletrendszerbe, egyszerű számolással kapjuk, hogy $x_1 = 1, y_1 = 1$, vagy pedig $x_2 = -1, y_2 = -1$. Tehát két stacionárius pont van: $(1,1)$ és $(-1,-1)$. Most megvizsgáljuk a $D(x,y)$ segítségével, hogy ebben a pontban van-e lokális szélsőérték. Ehhez szükségünk van a másodrendű parciális deriváltakra:

$$f_{xx}(x,y) = 2 + \frac{4}{x^3 y}, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{2}{x^2 y^2}, \qquad f_{yy}(x,y) = 2 + \frac{4}{x y^3},$$

ezért

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = \left(2 + \frac{4}{x^3 y}\right) \cdot \left(2 + \frac{4}{x y^3}\right) - \frac{4}{x^4 y^4}.$$

Most a stacionárius pontokban vizsgáljuk meg $D(x,y)$-t: $D(x_1, y_1) = D(1,1) = 32 > 0$ tehát ebben a pontban a függvénynek lokális szélsőértéke van, $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$ miatt lokális minimum, melynek értéke $f(1,1) = 4$. A másik stacionárius pontban $D(x_2, y_2) = D(-1,-1) = 32 > 0$, így ebben a pontban is van a függvénynek lokális szélsőértéke, mely $f_{xx}(-1,-1) = 6 > 0$ miatt ugyancsak lokális minimum, melynek értéke $f(-1,-1) = 4$. A függvényt definiáló képletből látható, hogy az (x,y) és a $(-x,-y)$ pontban ugyanazt az értéket veszi fel. A felület egy darabjának képe, az $(1,1)$ stacionárius pont közelében:



22. Határozza meg hogy hol, és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = x^2 + y^4 - 12x - 2y^2$ kétváltozós függvénynek!

Megoldás: Először a stacionárius helyeket határozzuk meg. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f_x(x,y) = 2x - 12, \qquad f_y(x,y) = 4y^3 - 4y,$$

ezért a stacionárius pontok egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} 2x - 12 &= 0 \\ 4y^3 - 4y &= 0. \end{aligned}$$

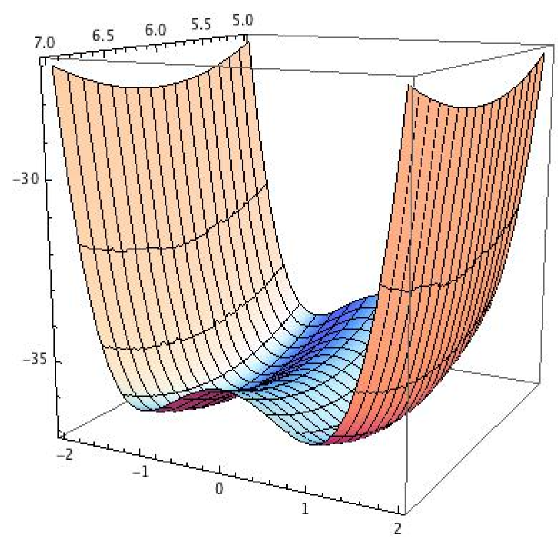
Az első egyenletből $x_0 = 6$, a másodikból pedig $y(y^2-1) = y(y+1)(y-1) = 0$, amiből három y értéket kapunk: $y_1 = -1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$. Tehát három stacionárius pont van: $(6,-1)$, $(6,0)$ és $(6,1)$. Most megvizsgáljuk a $D(x,y)$ segítségével, hogy ebben a pontban van-e lokális szélsőérték. Ehhez szükségünk van a másodrendű parciális deriváltakra:

$$f_{xx}(x,y) = 2, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0, \qquad f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 4,$$

ezért

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 2 \cdot (12y^2 - 4) = 24y^2 - 8.$$

Most a stacionárius pontokban vizsgáljuk meg $D(x,y)$-t: $D(x_0,y_1) = D(6,-1) = 16 < 0$ tehát ebben a pontban a függvénynek lokális szélsőértéke van, $f_{xx}(6,-1) = 2 > 0$ miatt lokális minimum, melynek értéke $f(6,-1) = -37$. A második stacionárius pontban $D(x_0,y_2) = D(6,0) = -8 < 0$, így ebben a pontban nincs a függvénynek lokális szélsőértéke. Végül, a harmadik stacionárius pontban $D(x_0,y_3) = D(6,1) = 16$, így a függvénynek ebben a pontban is lokális szélsőértéke van, $f_{xx}(6,1) = 2 > 0$ miatt lokális minimum, melynek értéke $f(6,1) = -37$.



23. Határozza meg hogy hol, és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = x^2y - xy - y^2$ kétváltozós függvénynek!

Megoldás: Először a stacionárius helyeket határozzuk meg. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f_x(x,y) = 2xy - y, \qquad f_y(x,y) = x^2 - x - 2y,$$

ezért a stacionárius pontok egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} 2xy - y &= 0 \\ x^2 - x - 2y &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenletből $y = \frac{x^2-x}{2}$, ezt az első egyenletbe helyettesítva y-t kiküszöböltük, és x-re az

$$x(x-1)(2x-1) = 0$$

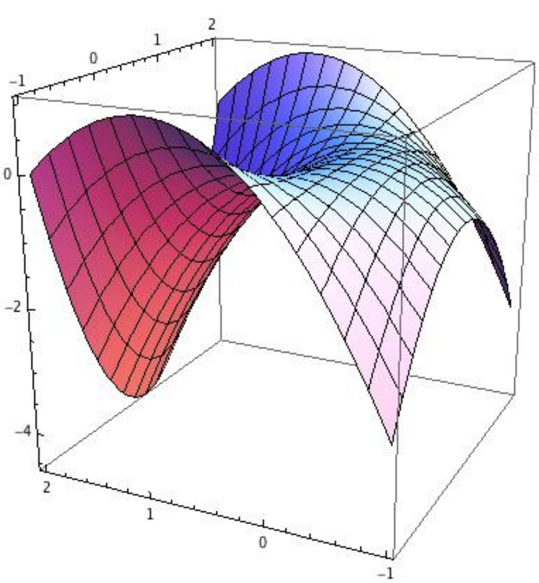
egyenletet kapjuk, melynek három gyöke: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$ és $x_3 = 1$. A megfelelő y értékek: $y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{1}{8}$ és $y_3 = 0$, tehát három stacionárius pont van: $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$ és $(1,0)$. Most megvizsgáljuk a $D(x,y)$ segítségével, hogy ebben a pontban van-e lokális szélsőérték. Ehhez szükségünk van a másodrendű parciális deriváltakra:

$$f_{xx}(x,y) = 2y, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2x - 1, \qquad f_{yy}(x,y) = -2,$$

ezért

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 2y \cdot (-2) - (2x-1)^2 = -4y - (2x-1)^2.$$

Most a stacionárius pontokban vizsgáljuk meg $D(x,y)$-t: $D(x_1,y_1) = D(0,0) = -1 < 0$ tehát ebben a pontban a függvénynek nincs lokális szélsőértéke. A második stacionárius pontban $D(x_2,y_2) = D(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}) = \frac{1}{2} > 0$, így ebben a pontban a függvénynek lokális szélsőértéke van, mely $f_{xx}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}) = -\frac{1}{4} < 0$ miatt lokális maximum, értéke $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}) = \frac{1}{64}$. Végül, a harmadik stacionárius pontban $D(x_3,y_3) = D(1,0) = -1$, így a függvénynek ebben a pontban nincs lokális szélsőértéke.



24. Határozza meg hogy hol, és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = 2x^3+6xy^2-6x-12y^2$ kétváltozós függvénynek!

Megoldás: Először a stacionárius helyeket határozzuk meg. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f_x(x,y) = 6x^2 + 6y^2 - 6, \qquad f_y(x,y) = 12xy - 24y,$$

ezért a stacionárius pontok egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} 6x^2 + 6y^2 - 6 &= 0 \\ 12xy - 24y &= 0, \end{aligned}$$

vagy átalakítva

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ y(x-2) &= 0. \end{aligned}$$

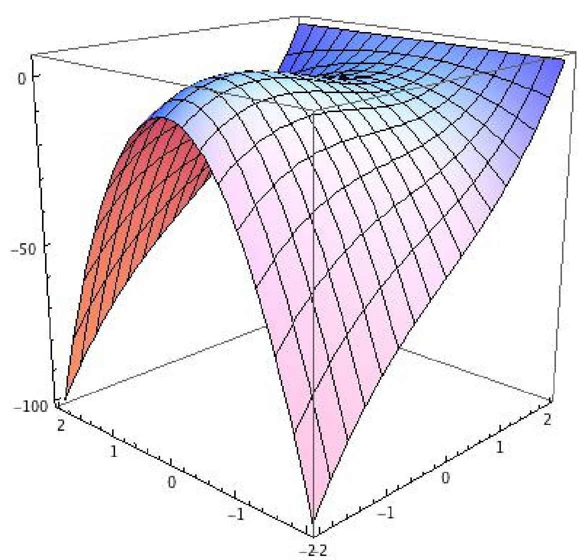
A második egyenletben, ha $y = 0$, akkor az első egyenletben $x^2 = 1$, így $x = \pm 1$. Ha viszont $y \neq 0$, akkor a második egyenletből $x = 2$, ami az első egyenlet alapján lehetetlen. Tehát két stacionárius pont van: az $x_1 = 1$ és $y_1 = 0$ választással az $(1,0)$ pont, és az $x_2 = -1$ és $y_1 = 0$ választással a $(-1,0)$ pont. Most megvizsgáljuk a $D(x,y)$ segítségével, hogy ezekben a pontban van-e lokális szélsőérték. Ehhez szükségünk van a másodrendű parciális deriváltakra:

$$f_{xx}(x,y) = 12x, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 12y, \qquad f_{yy}(x,y) = 12x - 24,$$

ezért

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 12x \cdot (12x-24) - (12y)^2 = 144(x^2 - 2x - y^2).$$

Most a stacionárius pontokban vizsgáljuk meg $D(x,y)$-t: $D(x_1,y_1) = D(1,0) = -144 < 0$ tehát ebben a pontban a függvénynek nincs lokális szélsőértéke. A második stacionárius pontban $D(x_2,y_2) = D(-1,0) = 432 > 0$, így ebben a pontban a függvénynek lokális szélsőértéke van, mely $f_{xx}(-1,0) = -12 < 0$ miatt lokális maximum, értéke $f(-1,0) = 4$. Az alábbi ábrán jól látható a nyeregpont az $(1,0)$ pontban, és a lokális maximum a $(-1,0)$ pontban.



25. Határozza meg hogy hol, és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = -x^2 + 2y^3 - xy + 2x - 2y$ kétváltozós függvénynek!

Megoldás: Először a stacionárius helyeket határozzuk meg. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f_x(x,y) = -2x - y + 2, \qquad f_y(x,y) = 6y^2 - x - 2,$$

ezért a stacionárius pontok egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} -2x - y + 2 &= 0 \\ 6y^2 - x - 2 &= 0. \end{aligned}$$

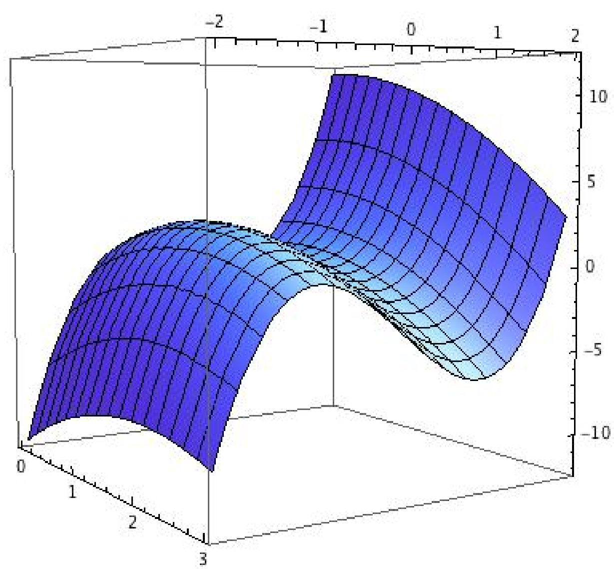
Az első egyenletből $y = -2x + 2$, ezt a második egyenletbe helyettesítve a $24x^2 - 49x + 22 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk x-re, melynek két megoldása $x_1 = \frac{2}{3}$ és $x_2 = \frac{11}{8}$, a megfelelő y értékek pedig $y_1 = \frac{2}{3}$ és $y_2 = -\frac{3}{4}$. Tehát két stacionárius pont van: a $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ pont, és a $(\frac{11}{8}, -\frac{3}{4})$ pont. Most megvizsgáljuk a $D(x,y)$ segítségével, hogy ezekben a pontban van-e lokális szélsőérték. Ehhez szükségünk van a másodrendű parciális deriváltakra:

$$f_{xx}(x,y) = -2, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -1, \qquad f_{yy}(x,y) = 12y,$$

ezért

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = (-2) \cdot 12y - (-1)^2 = -24y - 1.$$

Most a stacionárius pontokban vizsgáljuk meg $D(x,y)$-t: $D(x_1,y_1) = D(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = -17 < 0$ tehát ebben a pontban a függvénynek nincs lokális szélsőértéke. A második stacionárius pontban $D(x_2,y_2) = D(\frac{11}{8}, -\frac{3}{4}) = 17 > 0$, így ebben a pontban a függvénynek lokális szélsőértéke van, mely $f_{xx}(\frac{11}{8}, -\frac{3}{4}) = -2 < 0$ miatt lokális maximum, értéke $f(\frac{11}{8}, -\frac{3}{4}) = \frac{163}{64}$.



26. Határozza meg hogy hol, és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ kétváltozós függvénynek!

Megoldás: Először a stacionárius helyeket határozzuk meg. Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f_x(x,y) = 8xe^y - 8x^3, \qquad f_y(x,y) = 4x^2e^y - 4e^{4y},$$

ezért a stacionárius pontok egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} 8xe^y - 8x^3 &= 0 \\ 4x^2e^y - 4e^{4y} &= 0, \end{aligned}$$

vagy átalakítva és egyszerűsítve:

$$\begin{aligned} x(e^y - x^2) &= 0 \\ x^2 &= e^{3y}. \end{aligned}$$

A második egyenletből látható, hogy x nem lehet nulla, így az első egyenletből $x^2 = e^y$ adódik. Ezt a második egyenletbe helyettesítve az $e^y = e^{3y}$ egyenletet kapjuk y-ra, melyből $y = 3y$, sígy $y = 0$ következik. Ezért $x^2 = 1$, vagyis az $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$ megoldásokat kapjuk. Tehát két stacionárius pont van: a $(-1,0)$ pont, és az $(1,0)$ pont. Most megvizsgáljuk a $D(x,y)$ segítségével, hogy ezekben a pontban van-e lokális szélsőérték. Ehhez szükségünk van a másodrendű parciális deriváltakra:

$$f_{xx}(x,y) = 8e^y - 24x^2, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 8xe^y, \qquad f_{yy}(x,y) = 4x^2e^y - 16e^{4y},$$

ezért

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = (8e^y - 24x^2) \cdot (4x^2e^y - 16e^{4y}) - 64x^2e^{2y}.$$

Most a stacionárius pontokban vizsgáljuk meg $D(x,y)$-t: $D(-1,0) = 128 > 0$ tehát ebben a pontban a függvénynek lokális szélsőértéke van, ami $f_{xx}(-1,0) = -16 < 0$ miatt lokális maximum, értéke $f(-1,0) = 1$. A második stacionárius pontban ugyanez a helyzet: $D(1,0) = 128 > 0$, így ebben a pontban is lokális szélsőértéke van a függvénynek, mely $f_{xx}(1,0) = -16 < 0$ miatt ugyancsak lokális maximum, és értéke $f(1,0) = 1$.