MATEMATIKA I.
Határérték, folytonosság, függvényvizsgálat

- **Határozzuk meg a határértéket, amennyiben létezik!**

1. $\lim_{t\to -3} \frac{t^2-9}{2t^2+7t+3}$

   Megoldás: Mivel a számláló és a nevező egyaránt nulla a -3 pontban, így mindkettőből kiemelhető a $(t-(-3)) = t+3$ tényező:

$$\lim_{t\to -3} \frac{t^2-9}{2t^2+7t+3} = \lim_{t\to -3} \frac{(t-3)(t+3)}{(2t+1)(t+3)} = \lim_{t\to -3} \frac{t-3}{2t+1} = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5}.$$

   Az utolsó lépésben azt használtuk fel, hogy 1. *a tört határértéke egyenlő a számláló és a nevező határértékének hányadosával, amennyiben ezek a határértékek léteznek, végesek, és a nevező határértéke nem nulla*, továbbá 2. *a számláló és a nevező folytonos a -3 pontban, így a határértékeik behelyettesítéssel számíthatók ki.*

2. $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^3+8}$

   Megoldás: Mivel a számláló és a nevező egyaránt nulla a -2 pontban, így mindkettőből kiemelhető a $(x-(-2)) = x+2$ tényező:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^3+8} = \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \lim_{x\to -2} \frac{1}{x^2-2x+4} = \frac{1}{12}.$$

   A nevező szorzattá alakításához az

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

   azonosságot használtuk fel az $a = x, b = -2$ választással:

$$x^3 + 8 = x^3 - (-2)^3 = (x-(-2))(x^2 + x\cdot(-2) + (-2)^2) =$$

$$(x+2)(x^2-2x+4).$$

   Az utolsó lépésben ismét az előző feladatban alkalmazott gondolatmanetet használtuk.

3. $\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h}$

   Megoldás: Mivel a számláló és a nevező egyaránt nulla a 0 pontban, így mindekettő osztható h-val. Valóban, ha elvégezzük a köbre emelést, azt kapjuk, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{12h+6h^2+h^3}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} 12 + 6h + h^2 = 12.$$

   A köbre emelést az

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

   azonosság alapján végeztük el, az $a = 2, b = h$ választással. Az utolsó lépésben - ismét az illető függvény folytonossága alapján - behelyettesítéssel számítottuk ki a határértéket.

4. $\lim_{x\to 3}(2x+|x-3|)$

Megoldás: Kiszámítjuk a bal és a jobboldali határértéket a 3 pontban: a baloldali határérték esetén $x<3$, tehát $x-3<0$, ezért $|x-3|=-(x-3)=3-x$, és

$$\lim_{x\to 3^-}(2x+|x-3|)=\lim_{x\to 3^-}(2x+3-x)=\lim_{x\to 3^-}x+3=6.$$

A jobboldali határérték esetén $x>3$, ezért $x-3>0$, tehát $|x-3|=x-3$, és

$$\lim_{x\to 3^+}(2x+|x-3|)=\lim_{x\to 3^-}(2x+x-3)=\lim_{x\to 3^-}3x-3=6.$$

Mivel a bal- és jobboldali határérték egyaránt 6, ezért a határérték létezik, és ugyancsak 6:

$$\lim_{x\to 3}(2x+|x-3|)=6.$$

5. $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$

Megoldás: Mivel baloldali határértékről van szó a 0 pontban, így $x<0$, és $|x|=-x$. Ezért azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{x}=-\infty.$$

6. $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$

Megoldás: Mivel jobboldali határértékről van szó a 0 pontban, így $x>0$, és $|x|=x$. Ezért azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)=0.$$

7. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$

Megoldás: *Racionalizáljuk a törtet*, azaz, beszorozzuk a számlálót és a nevezőt a

$$(\sqrt{6-x}+2)(\sqrt{3-x}+1)$$

kifejezéssel, amiből az $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ azonosság alapján

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{6-x}-2)(\sqrt{6-x}+2)(\sqrt{3-x}+1)}{(\sqrt{3-x}-1)(\sqrt{6-x}+2)(\sqrt{3-x}+1)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{((6-x)-4)(\sqrt{3-x}+1)}{((3-x)-1)(\sqrt{6-x}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(\sqrt{3-x}+1)}{(2-x)(\sqrt{6-x}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2}=\frac{1}{2}$$

adódik. A fenti azonosságot kétszer alkalmaztuk: ha $a=\sqrt{6-x}$, $b=2$, akkor

$$(\sqrt{6-x}-2)(\sqrt{6-x}+2)=(6-x)-4=2-x,$$

és ha $a=\sqrt{3-x}$, $b=1$, akkor

$$(\sqrt{3-x}+1)(\sqrt{3-x}-1)=(3-x)-1=2-x.$$

Az utolsó lépésben pedig az $x=2$ helyettesítést alkalmazhattuk, hiszen a függvény folytonos ebben a pontban, és a nevező határértéke nem nulla.

- **A folytonosság és a határérték definíciója és tulajdonságai alapján vizsgáljuk meg az adott függvények folytonosságát az adott a pontban.**

1) $f(x) = x^2 + \sqrt{7-x}, \;\; a = 4$

Megoldás: Az $x \mapsto x^2$, az $x \mapsto 7-x$, és az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvények folytonosak az $a = 4$ pontban, a hatványfüggvények folytonossága, valamint a műveleti tulajdonságok miatt. Az $x \mapsto \sqrt{7-x}$ ugyancsak folytonos, az összetett függvény folytonossága miatt; külső függvény: $x \mapsto \sqrt{x}$, belső függvény: $x \mapsto 7-x$. Két folytonos függvény összege ugyancsak folytonos, ismét a műveleti tulajdonságok alapján, ezért f is folytonos az $a = 4$ pontban.

2) $f(x) = (x + 2x^3)^4, \;\; a = -1$

Megoldás: A fenti érvelés megismételhető: f-et az $x \mapsto x$ folytonos hatványfüggvényből kapjuk az alapműveletek ismétlésével, melyek folytonos függvényt eredményeznek.

3) $h(t) = \frac{2t-3t^2}{1+t^3}, \;\; a = 1$

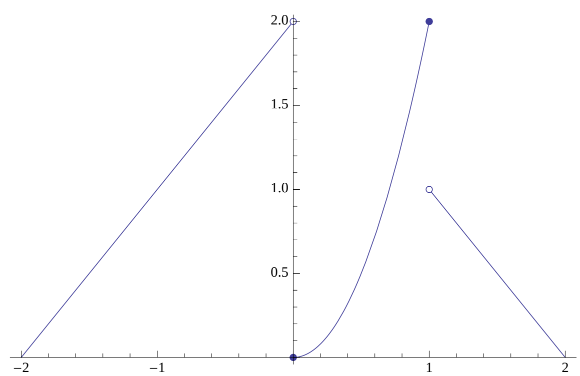
Megoldás: A fenti érvelés megismételhető: f-et a $t \mapsto t$ folytonos hatványfüggvényből kapjuk az alapműveletek ismétlésével, melyek folytonos függvényt eredményeznek.

4)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{if } x < 0 \\ 2x^2 & \text{if } 0 \le x \le 1, \\ 2-x & \text{if } x > 1 \end{cases} \qquad a = -1, 0, 1, 2.$$

Ábrázoljuk a függvényt.

Megoldás: Kezdjük az ábrázolással: a függvény értelmezési tartománya a valós számegyenes, a $[-2, 2]$ intervallumra való szűkítését ábrázoljuk, hiszen a $]-\infty, 2[$ intervallumon megegyezik az $x \mapsto x+2$ függvénnyel, a $]2, +\infty[$ intervallumon pedig az $x \mapsto 2-x$ függvénnyel, melyek képei a megfelelő egyenesek folytatásai:



A függvény nyilván folytonos minden olyan a pontban, amelyik különbözik 0-tól és 1-től, mivel egyenlő egy folytonos függvénnyel egy a körüli nyílt intervallumon. Tehát a megadott pontok közül az $a = -1$ és $a = 2$ pontokban a függvény folytonos. Az $a = 0$ pontban

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x + 2 = 2,$$

és

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x^2 = 0,$$

továbbá $f(0) = 0$. Ezért f jobbról folytonos 0-ban, balról pedig nem, tehát az $a = 0$ pont nem megszüntethető szakadási pont.

Az $a = 1$ pontban

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x^2 = 2,$$

és

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2 - x = 1,$$

valamint $f(1) = 2$. Ezért f balról folytonos az 1 pontban, jobbról pedig nem, tehát az $a = 1$ pont nem megszüntethető szakadási pont.

5) A Középérték Tétel segítségével bizonyítsuk be, hogy az

$$x^4 + x - 3 = 0$$

egyenletnek van gyöke a $]0, 2[$ intervallumban.

Megoldás: *Középérték Tétel: zárt intervallumon folytonos valós értékű függvény minden olyan értéket felvesz, amely az intervallum végpontjaiban felvett értékek közé esik.* Legyen $f(x) = x^4 + x - 3$, ekkor f folytonos a valós egyenesen. Mivel $f(1) = -1 < 0$ és $f(2) = 15 > 0$, a Középérték Tétel alapján f minden $f(1) = -1$ és $f(2) = 15$ közé eső értéket felvesz az $]1, 2[$ intervallumban, így a 0-t is, tehát van olyan c, hogy $1 < c < 2$ és $f(c) = c^4 + c - 3 = 0$.

6) Van olyan valós szám, ami pontosan eggyel nagyobb a saját köbénél?

Megoldás: Egy ilyen számra teljesülnie kell az $x = x^3 + 1$, tehát az $x^3 - x + 1 = 0$ egyenlőségnek. Legyen $f(x) = x^3 - x + 1$, ekkor $f(-2) = -5 < 0$ és $f(1) = 1 > 0$. A Középérték Tétel alapján f minden $f(-2) = -5$ és $f(1) = 1$ közé eső értéket fevesz a $]-2, 1[$ intervallumban, így a 0-t is, tehát van olyan c, hogy $-2 < c < 1$ és $f(c) = c^3 - c + 1 = 0$, azaz $c = c^3 + 1$, vagyis c pontosan eggyel nagyobb, mint a saját köbe.

- **Függvényvizsgálat**

1) Hol metszi az x tengelyt az $f(x) = \ln(x^2 - 3)$ függvény grafikonja?

Megoldás: Az x tengellyel való $(a, f(a))$ metszéspont esetén $f(a) = 0$:

$$\ln(a^2 - 3) = 0 = \ln 1,$$

s mivel az ln függvény kölcsönösen egyértelmű, ebből $a^2 - 3 = 1$ következik. Másszóval $a^2 = 4$, vagyis $a = -2$, vagy $a = 2$. Mivel $a^2 - 3$ mindkét esetben az ln függvény értelmezési tartományához tartozik, így a helyes válasz: $a = -2$, vagy $a = 2$.

2) Hol metszi az y tengelyt az $f(x) = \frac{x^3+2x+1}{x^4}$ függvény grafikonja?

Megoldás: Az y tengellyel való $(a, f(a))$ metszéspont esetén $a = 0$. Mivel 0-ban az f nincs értelmezve, ezért az f függvény grafikonja nem metszi az y tengelyt.

3) Vizsgálja meg az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvény szimmetria tulajdonságait!

Megoldás: A lehetséges szimmetria tulajdonságok a *párosság*: $f(-x) = f(x)$ minden x-re az értelmezési tartományban, és a *páratlanság*: $f(-x) = -f(x)$ minden x-re az értelmezési tartományban. Esetünkben:

$$f(-x) = (-x)e^{-(-x)^2} = -xe^{-x^2} = -f(x),$$

ezért a függvény páratlan.

4) Vizsgálja meg az $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ függvény szimmetria tulajdonságait!

Megoldás: A páros kitevőjű hatványfüggvények mind páros függvények, és nyilván páros függvények összege mindig páros, továbbá páros függvény konstansszorosa is páros. Mivel $x \mapsto x^4$, $x \mapsto x^2$ és $x \mapsto x^0 = 1$ páros kitevőjű hatványfüggvények, így f páros. (Az állítás az előző feladathoz hasonlóan, közvetlen számolással a definíció alapján is igazolható.)

5) Adja meg az $f(x) = x^3 - x^2 + x$ függvény függvény értelmezési tartományát és határozza meg lokális szélsőértékeit!

Megoldás: A függvény az egész valós egyenesen értelmezve van, és mindenütt differenciálható. Deriváltja $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Az f' zérushelyei az

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

egyenletből kaphatók, de ennek az egyenletnek nincs valós gyöke, hiszen természetesen $f(x) = 2x^2 + (x-1)^2$, két különböző valós szám négyzetének összege, mindig pozitív. (Ez a másodfokú egyenlet megoldóképletéből is látható, hiszen a diszkrimináns $4 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$.) Tehát f-nek nincs lokális szélsőértéke.

6) Adja meg az $f(x) = x^3 - x^2 + x$ függvény függvény értelmezési tartományát és határozza meg inflexiós pontjait!

Megoldás: A függvény az egész valós egyenesen értelmezve van, és mindenütt kétszer differenciálható. Deriváltja $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$, második deriváltja $f''(x) = 6x - 2$. Az f'' egyetlen zérushelye az

$$f''(x) = 6x - 2 = 0$$

egyenletből: $x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Ha $x < \frac{1}{3}$, például $x = 0$, akkor $f''(0) = -2$ miatt f'' negatív, míg $x > \frac{1}{3}$ esetén, például $x = 1$-re $f''(1) = 4$ miatt f'' pozitív. Tehát az $x = \frac{1}{3}$ pontban az f'' előjelet vált, s ebben a pontban konkávról konvexre vált az f grafikonja, így ez a pont (az egyetlen) inflexiós pont.

7) Adja meg az $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ függvény függvény értelmezési tartományát, és határozza meg lokális szélsőértékeit!

Megoldás: A függvény az egész valós egyenesen értelmezve van, és mindenütt kétszer differenciálható. Deriváltja $f'(x) = 4x^3 - 4x$. Az f' zérushelyei az

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x+1)(x-1) = 0$$

egyenletből kaphatók, így $x = 0$, vagy $x = -1$, vagy $x = 1$. A függvény második deriváltja $f''(x) = 12x^2 - 4$, ebből $f''(0) = -4 < 0$ miatt $x = 0$ lokális maximum, melynek értéke $f(0) = 3$; $f''(-1) = 8 > 0$ miatt $x = -1$ lokális minimum, melynek értéke $f(-1) = 2$, és $f''(1) = 8 > 0$ miatt $x = 1$ is lokális minimum, melynek értéke szintén $f(1) = 2$ – ez utóbbi következik abból, hogy a függvény páros, tehát az y tengelyre nézve szimmetrikus.

8) Adja meg az $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ függvény értelmezési tartományát, és határozza meg inflexiós pontjait!

Megoldás: A függvény az egész valós egyenesen értelmezve van, és mindenütt kétszer differenciálható. Deriváltja $f'(x) = 4x^3 - 4x$, második deriváltja $f''(x) = 12x^2 - 4$. Az f'' zérushelyei az

$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0$$

egyenletből: $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ és $x_2 = +\frac{\sqrt{3}}{3}$. Mivel a függvény páros, elegendő a nemnegatív félegyenesre szorítkozni. Ha $0 \leq x < \frac{\sqrt{3}}{3}$, pl. $x = \frac{1}{4}$, akkor $f''(\frac{1}{4}) = -\frac{13}{4}$ miatt f'' negatív, míg $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ esetén, pl. $x = 1$-re $f''(1) = 8$ miatt f'' pozitív. Tehát az $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ pontban az f'' előjelet vált, ebben a pontban konkávról konvexre vált az f grafikonja, így ez a pont inflexiós pont. A szimmetria miatt $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ is inflexiós pont, több inflexiós pont nincs.

9) Határozza meg az $f(x) = x + \frac{4}{x}$ függvény lokális minimumának függvényértékét!

Megoldás: Az f az $x = 0$ pont kivételével mindenütt értelmezve van és kétszer differenciálható a valós egyenesen, deriváltja $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$, második deriváltja $f''(x) = \frac{8}{x^3}$. Az f' zérushelyei az

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0, \text{ azaz } x^2 = 4$$

egyenletből $x = \pm 2$. Ha $x = 2$, akkor $f''(2) = 1 > 0$, így az $x = 2$ pontban a függvénynek lokális minimuma van, értéke $f(2) = 4$. Ha $x = -2$, akkor $f''(-1) = -1$, tehát az $x = -2$ pontban a függvénynek lokális maximuma van, értéke $f(-1) = -4$.

10) Határozza meg az $f(x) = x + \frac{4}{x}$ függvény lokális maximumának függvényértékét!

Megoldás: Ld. az előző feladatot.

11) Adja meg az $f(x) = \frac{6x}{x^2+2}$ függvény értelmezési tartományát és határozza meg lokális szélsőértékeit!

Megoldás: A függvény az egész valós egyenesen értelmezve van, és mindenütt differenciálható, deriváltja $f'(x) = \frac{12-6x^2}{(x^2+2)^2}$. Az f' zérushelyei az

$$f'(x) = \frac{12 - 6x^2}{(x^2 + 2)^2} = 0, \text{ azaz } 12 - 6x^2 = 0, \text{ azaz } x^2 = 2$$

egyenletből kaphatók, így $x = \pm\sqrt{2}$. Ha $x < -\sqrt{2}$, például $x = -2$, akkor $f'(-2) = -\frac{12}{36} < 0$ negatív, ha pedig $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, például $x = 0$, akkor $f'(0) = 3 > 0$ pozitív, tehát a derivált negatívból pozitívba vált, így az $x = -\sqrt{2}$ pontban a függvénynek lokális minimuma van, értéke $f(-\sqrt{2}) = -\frac{6\sqrt{2}}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Ha $x > \sqrt{2}$, például $x = 2$, akkor $f'(2) = -\frac{12}{36} < 0$ negatív, ha pedig $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, például $x = 0$, akkor $f'(0) = 3 > 0$ pozitív, tehát a derivált pozitívból negatívba vált, így az $x = \sqrt{2}$ pontban a függvénynek lokális maximuma van, értéke $f(\sqrt{2}) = \frac{6\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

12) Milyen intervallumokon nő az $f(x) = -x^3 + 12x + 1$ függvény?

Megoldás: *A függvény az értelmezési tartományának olyan részintervallumain nő, amelyeken a deriváltja pozitív.* Az f a valós egyenesen mindenütt értelmezve van és differenciálható, deriváltja $f'(x) = -3x^2 + 12$. Az $f'(x) = -3x^2 + 12 > 0$ egyenlőtlenség megoldásához először megoldjuk a

$$-3x^2 + 12 = 0, \text{ azaz } 3x^2 = 12, \text{ azaz } x^2 = 4$$

egyenletet, mert a megoldások közti intervallumokon a függvény nem vált előjelet, hiszen folytonos. A megoldások $x = \pm 2$. Ha $x < -2$, például $x = -3$, akkor $f'(-3) = -15$, negatív. Ha $-2 < x < 2$, például $x = 0$, akkor $f'(0) = 12$, pozitív. Végül, ha $x > 2$, például $x = 3$, akkor $f'(3) = -15$, negatív. Összefoglalva, a függvény a $]-2, 2[$ intervallumon nő.

13) Milyen intervallumokon csökken az $f(x) = -2x^3 + 6x - 4$ függvény?

Megoldás: *A függvény az értelmezési tartományának olyan részintervallumain csökken, amelyeken a deriváltja negatív.* Az f a valós egyenesen mindenütt értelmezve van és differenciálható, deriváltja $f'(x) = -6x^2 + 6$. Az $f'(x) = -6x^2 + 6 < 0$ egyenlőtlenség megoldásához először megoldjuk a

$$-6x^2 + 6 = 0, \text{ azaz } 6x^2 = 6, \text{ azaz } x^2 = 1$$

egyenletet, mert a megoldások közti intervallumokon a függvény nem vált előjelet, hiszen folytonos. A megoldások $x = \pm 1$. Ha $x < -1$, például $x = -2$, akkor $f'(-2) = -18$, negatív. Ha $-1 < x < 1$, például $x = 0$, akkor $f'(0) = 6$, pozitív. Végül, ha $x > 1$, például $x = 2$, akkor $f'(2) = -18$, negatív. Összefoglalva, a függvény a $]-\infty, -1[$ intervallumon, és a $]1, +\infty[$ intervallumon csökken.

14) Milyen intervallumokon nő az $f(x) = -\frac{2x}{x^2+4}$ függvény?

Megoldás: A függvény az értelmezési tartományának olyan részintervallumain nő, amelyeken a deriváltja pozitív. Az f a valós egyenesen mindenütt értelmezve van és differenciálható, deriváltja $f'(x) = \frac{2x^2-8}{(x^2+4)^2}$. Az $f'(x) = \frac{2x^2-8}{(x^2+4)^2} > 0$ egyenlőtlenség megoldásához először megoldjuk a

$$\frac{2x^2 - 8}{(x^2 + 4)^2} = 0, \text{ azaz } 2x^2 = 8, \text{ azaz } x^2 = 4$$

egyenletet, mert a megoldások közti intervallumokon a függvény nem vált előjelet, hiszen folytonos. A megoldások $x = \pm 2$. Ha $x < -2$, például $x = -3$, akkor $f'(-3) = \frac{10}{169}$, pozitív. Ha $-2 < x < 2$, például $x = 0$, akkor $f'(0) = -\frac{8}{16}$, negatív. Végül, ha $x > 2$, például $x = 3$, akkor $f'(3) = \frac{10}{169}$, pozitív. Összefoglalva, a függvény a $]-\infty, -2[$ intervallumon és a $]2, +\infty[$ intervallumon nő.

15) Határozza meg az $f(x) = -\frac{2x}{x^2+4}$ függvény lokális minimumának függvényértékét!

Megoldás: Az f mindenütt értelmezve van és kétszer differenciálható a valós egyenesen, deriváltja $f'(x) = \frac{2x^2-8}{(x^2+4)^2}$ (ld. előző feladat). Az f' zérushelyei az $x = \pm 2$ pontok. Az előző feladatban láttuk, hogy f' a -2 pontban pozitívból negatívba vált, így ebben a pontban lokális maximuma van, a 2 pontban pedig negatívból pozitívba vált, így lokális minimuma a 2 pontban van, s ott értéke $f(2) = -\frac{1}{2}$.

16) Határozza meg az $f(x) = -\frac{2x}{x^2+4}$ függvény lokális maximumának függvényértékét!

Megoldás: Az előző feladatban láttuk, hogy f' a -2 pontban pozitívból negatívba vált, így ebben a pontban a függvénynek lokális maximuma van. A lokális maximum értéke $f(-2) = \frac{1}{2}$.

17) Hol konkáv az $f(x) = \frac{x^6}{30} - 8x^2$ függvény?

Megoldás: A függvény az egész valós számegyenesen értelmezve van, kétszer differenciálható, és *azokon az intervallumokon konkáv, amelyeken a második deriváltja negatív.* A függvény deriváltja $f'(x) = \frac{x^5}{5} - 16x$, második deriváltja $f''(x) = x^4 - 16$. Az $f''(x) = x^4 - 16 < 0$ egyenlőtlenség megoldásához először a megfelelő egyenletet oldjuk meg:

$$x^4 - 16 = 0 \text{ azaz } x^4 = 16,$$

tehát $x = \pm 2$. Ha $x < -2$, akkor $x^2 > 4$, és $x^4 > 16$, tehát ekkor $f''(x) > 0$. Hasonlóan, ha $x > 2$, azt kapjuk, hogy $f''(x) > 0$. Viszont ha $-2 < x < 2$, akkor $x^2 < 4$ és $x^4 < 16$, tehát $f''(x) < 0$. Tehát f a $]-2, 2[$ intervallumon konkáv.