MATEMATIKA II.
Gradiens, iránymenti derivált

1. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ függvény gradiensét a $(-1,2)$ pontban!

   Megoldás: A gradiens, definíció szerint, a függvény parciális deriváltjaiból képzett vektor:

   $$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big), \ \ \nabla f(x,y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big).$$

   Használhatjuk az egyszerűbb jelölést is a parciális deriváltakra:

   $$\nabla f = \big(f_x, f_y\big), \ \ \nabla f(x,y) = \big(f_x(x,y), f_y(x,y)\big).$$

   Ennek megfelelően esetünkben:

   $$f_x(x,y) = 2x + y, \qquad f_y(x,y) = x + 2y,$$

   $$\nabla f(x,y) = (2x + y, x + 2y),$$

   s a $(-1,2)$ pontban $x = -1, y = 2$, tehát

   $$f_x(-1,2) = 2 \cdot (-1) + 2 = 0, \qquad f_y(-1,2) = -1 + 2 \cdot 2 = 3,$$

   $$\nabla f(-1,2) = (0,3).$$

2. Határozza meg az $f(x,y) = 2x + x^3y - y$ függvény gradiensét a $(2,-2)$ pontban!

   Megoldás: A fenti jelölésekkel:

   $$f_x(x,y) = 2 + 3x^2y, \qquad f_y(x,y) = x^3 - 1,$$

   $$\nabla f(x,y) = (2 + 3x^2y, x^3 - 1),$$

   s a $(2,-2)$ pontban $x = 2, y = -2$, tehát

   $$f_x(2,-2) = 2 + 3 \cdot 2^2 \cdot (-2) = -22, \qquad f_y(2,-2) = 2^3 - 1 = 7,$$

   $$\nabla f(2,-2) = (-22,7).$$

3. Határozza meg az $f(x,y) = \sin 3xy^2$ függvény gradiensét a $(2,1)$ pontban!

   Megoldás: Az összetett függvény differenciálási szabálya alapján:

   $$f_x(x,y) = 3y^2 \cos 3xy^2, \qquad f_y(x,y) = 6xy \cos 3xy^2,$$

   $$\nabla f(x,y) = (3y^2 \cos 3xy^2, 6xy \cos 3xy^2),$$

   s a $(2,1)$ pontban $x = 2, y = 1$, tehát

   $$f_x(2,1) = 3 \cdot \cos 6 = 2.88, \qquad f_y(2,1) = 12 \cos 6 = 11.52,$$

   $$\nabla f(2,-2) = (2.88, 11.52).$$

4. Határozza meg az $f(x,y)=\cos(xy+x^2)$ függvény gradiensét a $(3,1)$ pontban!

Megoldás: Az összetett függvény differenciálási szabálya alapján:

$$f_x(x,y) = -(y+2x)\sin(xy+x^2), \qquad f_y(x,y) = -x\sin(xy+x^2),$$

$$\nabla f(x,y) = (-(y+2x)\sin(xy+x^2), -x\sin(xy+x^2)),$$

s a $(3,1)$ pontban $x=3, y=1$, tehát

$$f_x(3,1) = -7\cdot\sin 12 = 3.76, \qquad f_y(3,1) = -3\sin 12 = 1.61,$$

$$\nabla f(2,-2) = (3.76, 1.61).$$

5. Határozza meg az $f(x,y)=2\sqrt[3]{x}y+\frac{3y}{x}+4$ függvény gradiensét a $(8,1)$ pontban!

Megoldás: Az $f(x,y)$-t célszerűbb így felírni:

$$f(x,y) = 2x^{\frac{1}{3}}y + 3yx^{-1} + 4,$$

ezért

$$f_x(x,y) = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}y - 3yx^{-2}, \qquad f_y(x,y) = 2x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-1},$$

másszóval

$$f_x(x,y) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}y - \frac{3y}{x^2}, \qquad f_x(x,y) = 2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x}$$

és

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}y - \frac{3y}{x^2}, 2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x}\Big),$$

s a $(8,1)$ pontban $x=8, y=1$, tehát

$$f_x(8,1) = \frac{1}{6} - \frac{3}{64} = \frac{23}{192}, \qquad f_y(8,1) = 4 + \frac{3}{8} = \frac{35}{8},$$

$$\nabla f(8,1) = \Big(\frac{23}{192}, \frac{35}{8}\Big).$$

6. Határozza meg az $f(x,y)=y\cdot e^{x+2y}$ függvény gradiensét a $(2,-1)$ pontban!

Megoldás: A szorzat, és az összetett függvény differenciálási szabálya alapján:

$$f_x(x,y) = y\cdot e^{x+2y}, \qquad f_y(x,y) = e^{x+2y} + 2y\cdot e^{x+2y} = (2y+1)\cdot e^{x+2y},$$

és

$$\nabla f(x,y) = \Big(y\cdot e^{x+2y}, (2y+1)\cdot e^{x+2y}\Big),$$

s a $(2,-1)$ pontban $x=2, y=-1$, tehát

$$f_x(2,-1) = (-1)\cdot e^{2-2} = -1, \qquad f_y(2,-1) = (-1)\cdot e^{2-2} = -1,$$

$$\nabla f(2,-1) = (-1,-1).$$

7. Határozza meg az $f(x, y) = x \cdot \ln(x + y)$ függvény gradiensét a $(3, -2)$ pontban!

Megoldás: A szorzat, és az összetett függvény differenciálási szabálya alapján:

$$f_x(x, y) = \ln(x + y) + \frac{x}{x + y}, \qquad f_y(x, y) = \frac{x}{x + y},$$

és

$$\nabla f(x, y) = \left(\ln(x + y) + \frac{x}{x + y}, \frac{x}{x + y}\right),$$

s a $(3, -2)$ pontban $x = 3, y = -2$, tehát

$$f_x(3, -2) = \ln(3 - 2) + \frac{3}{3 - 2} = 3, \qquad f_y(3, -2) = \frac{3}{3 - 2} = 3,$$

$$\nabla f(3, -2) = (3, 3).$$

8. Határozza meg az $f(x, y) = x^3 \cdot (xy^2 - 1)^4$ függvény gradiensét a $(2, -1)$ pontban!

Megoldás: A szorzat differenciálási szabálya alapján:

$$f_x(x, y) = 3x^2(xy^2-1)^4+4x^3y^2(xy^2-1)^3 = (7x^3y^2-3x^2)(xy^2-1)^3, \qquad f_y(x, y) = 8x^4y(xy^2-1)^3,$$

és

$$\nabla f(x, y) = \left((7x^3y^2 - 3x^2)(xy^2 - 1)^3, 8x^4y(xy^2 - 1)^3\right),$$

s a $(2, -1)$ pontban $x = 2, y = -1$, tehát

$$f_x(2, -1) = 44, \qquad f_y(2, -1) = -128,$$

$$\nabla f(2, -1) = (44, -128).$$

9. Határozza meg az $f(x, y) = y^2 \cdot \sqrt{x^2 + y}$ függvény gradiensét a $(2, -3)$ pontban!

Megoldás: Az $f(x, y)$-t célszerű így felírni:

$$f(x, y) = y^2(x^2 + y)^{\frac{1}{2}}.$$

Ekkor, a szorzat differenciálási szabálya alapján:

$$f_x(x, y) = y^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = xy^2(x^2 + y)^{-\frac{1}{2}},$$

$$f_y(x, y) = 2y \cdot (x^2 + y)^{\frac{1}{2}} + y^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = 2y \cdot (x^2 + y)^{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{2}(x^2 + y)^{-\frac{1}{2}}$$

és

$$\nabla f(x, y) = \left(xy^2(x^2 + y)^{-\frac{1}{2}}, 2y(x^2 + y)^{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{2}(x^2 + y)^{-\frac{1}{2}}\right),$$

s a $(2, -3)$ pontban $x = 2, y = -3$, tehát

$$f_x(2, -3) = 18, \qquad f_y(2, -3) = -\frac{3}{2},$$

$$\nabla f(2, -3) = \left(18, -\frac{3}{2}\right).$$

10. Határozza meg az $f(x,y) = \frac{xy^4}{2x^3+y^2}$ függvény gradiensét a $(-1,1)$ pontban!

Megoldás: A hányados differenciálási szabálya alapján:

$$f_x(x,y) = \frac{y^4(2x^3+y^2) - xy^4 \cdot 6x^2}{(2x^3+y^2)^2} = \frac{y^6 - 4x^3y^4}{(2x^3+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{4xy^3(2x^3+y^2) - xy^4 \cdot 2y}{(2x^3+y^2)^2} = \frac{8x^4y^3 + 2xy^5}{(2x^3+y^2)^2},$$

és

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{y^6 - 4x^3y^4}{(2x^3+y^2)^2}, \frac{8x^4y^3 + 2xy^5}{(2x^3+y^2)^2}\Big),$$

s a $(-1,1)$ pontban $x = -1, y = 1$, tehát

$$f_x(-1,1) = 5, \qquad f_y(-1,1) = 6,$$

$$\nabla f(2,-3) = (5,6).$$

11. Határozza meg az $f(x,y) = \frac{2x^3-4y}{x^2+3y^3}$ függvény gradiensét a $(-1,1)$ pontban!

Megoldás: A hányados differenciálási szabálya alapján:

$$f_x(x,y) = \frac{6x^2 \cdot (x^2+3y^3) - (2x^3-4y) \cdot 2x}{(x^2+3y^3)^2} = \frac{2x^4 + 18x^2y^3 + 8xy}{(x^2+3y^3)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{-4(x^2+3y^3) - (2x^3-4y) \cdot 9y^2}{(x^2+3y^3)^2} = \frac{24y^3 - 18x^3y^2 - 4x^2}{(x^2+3y^3)^2},$$

és

$$\nabla f(x,y) = \Big(\frac{y^6 - 4x^3y^4}{(x^2+3y^3)^2}, \frac{24y^3 - 18x^3y^2 - 4x^2}{(x^2+3y^3)^2}\Big),$$

s a $(-1,1)$ pontban $x = -1, y = 1$, tehát

$$f_x(-1,1) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}, \qquad f_y(-1,1) = \frac{38}{16} = \frac{19}{8},$$

$$\nabla f(-1,1) = \Big(\frac{3}{4}, \frac{19}{8}\Big).$$

12. Határozza meg az $f(x,y) = \sin xy + \cos xy$ függvény gradiensét a $(\frac{\pi}{2},1)$ pontban!

Megoldás: A differenciálási szabályok alapján:

$$f_x(x,y) = y \cdot \cos xy - y \cdot \sin xy = y(\cos xy - \sin xy),$$

$$f_y(x,y) = x \cdot \cos xy - x \cdot \sin xy = x(\cos xy - \sin xy),$$

és

$$\nabla f(x,y) = \Big(y(\cos xy - \sin xy), x(\cos xy - \sin xy)\Big),$$

s a $(\frac{\pi}{2},1)$ pontban $x = \frac{\pi}{2}, y = 1$, tehát

$$f_x(\frac{\pi}{2},1) = 1 \cdot (0-1) = -1, \qquad f_y(\frac{\pi}{2},1) == \frac{\pi}{2} \cdot (0-1) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\nabla f\Big(\frac{\pi}{2},1\Big) = \Big(-1, -\frac{\pi}{2}\Big).$$

13. Határozza meg az $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ függvény gradiensét a $(3,4)$ pontban!

Megoldás: Az $f(x,y)$-t célszerű így felírni:

$$f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = f(x,y) = \ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

Ebből kapjuk:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2},$$
$$f_y(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2},$$

és

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right),$$

s a $(3,4)$ pontban $x=3, y=4$, tehát

$$f_x(3,4) = 1\cdot(0-1) = -1, \qquad f_y(3,4) == \frac{\pi}{2}\cdot(0-1) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\nabla f(3,4) = \left(\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right).$$

14. Határozza meg az $f(x,y) = 2xy^2 - y$ függvény $\underline{u} = (1,2)$ irányú iránymenti deriváltját az $(1,-1)$ pontban!

Megoldás: Az iránymenti derivált, definíció szerint

$$f_{\underline{u}}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{u_1}{\|\underline{u}\|} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{u_2}{\|\underline{u}\|} = f_x(x,y)\cdot\frac{u_1}{\|\underline{u}\|} + f_y(x,y)\cdot\frac{u_2}{\|\underline{u}\|},$$

ahol u_1 és u_2 az $\underline{u}$ vektor első, ill. második koordinátáját jelöli, tehát $\underline{u} = (u_1, u_2)$, $\|\underline{u}\|$ pedig az $\underline{u}$ vektor hosszát, tehát $\|\underline{u}\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2}$.

Esetünkben

$$f_x(x,y) = 2y^2, \qquad f_y(x,y) = 4xy - 1,$$

tehát az $(1,-1)$ pontban $x=1$ és $y=-1$, ezért

$$f_x(1,-1) = 2, \qquad f_y(1,-1) = -5,$$

továbbá

$$\underline{u} = (1,2), \text{ ezért } \|\underline{u}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}.$$

Végül tehát

$$f_{\underline{u}}(1,-1) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - 5\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{8}{\sqrt{5}}.$$

15. Határozza meg az $f(x,y) = (x^3y)^2$ függvény $\underline{u} = (-1,1)$ irányú iránymenti deriváltját az $(1,-1)$ pontban!

Megoldás: Célszerű $f(x,y)$-t így felírni:

$$f(x,y) = (x^3y)^2 = x^6y^2.$$

A fentiek alapján számolunk:

$$f_x(x,y) = 6x^5y^2, \qquad f_y(x,y) = 2x^6y,$$

tehát az $(1,-1)$ pontban $x = 1$ és $y = -1$, ezért

$$f_x(1,-1) = 6, \qquad f_y(1,-1) = -2,$$

továbbá

$$\underline{u} = (-1,1), \text{ ezért } \|\underline{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Végül tehát

$$f_{\underline{u}}(1,-1) = 6 \cdot \frac{(-1)}{\sqrt{2}} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{8}{\sqrt{2}}.$$

16. Határozza meg az $f(x,y) = (x^2y^4)^3$ függvény $\underline{u} = (3,-2)$ irányú iránymenti deriváltját az $(-1,1)$ pontban!

Megoldás: Célszerű $f(x,y)$-t így felírni:

$$f(x,y) = (x^2y^4)^3 = x^6y^{12}.$$

A fentiek alapján számolunk:

$$f_x(x,y) = 6x^5y^{12}, \qquad f_y(x,y) = 12x^6y^{11},$$

tehát a $(-1,1)$ pontban $x = -1$ és $y = 1$, ezért

$$f_x(-1,1) = -6, \qquad f_y(-1,1) = 12,$$

továbbá

$$\underline{u} = (3,-2), \text{ ezért } \|\underline{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

Végül tehát

$$f_{\underline{u}}(-1,1) = (-6) \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} + 12 \cdot \frac{(-2)}{\sqrt{13}} = -\frac{42}{\sqrt{13}}.$$

17. Határozza meg az $f(x,y) = xe^y - ye^x$ függvény $\underline{u} = (-5,2)$ irányú iránymenti deriváltját a $(0,0)$ pontban!

Megoldás: A fentiek alapján számolunk:

$$f_x(x,y) = e^y - ye^x, \qquad f_y(x,y) = xe^y - e^x,$$

tehát a $(0,0)$ pontban $x = 0$ és $y = 0$, ezért

$$f_x(0,0) = 1, \qquad f_y(0,0) = -1,$$

továbbá

$$\underline{u} = (-5,2), \text{ ezért } \|\underline{u}\| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}.$$

Végül tehát

$$f_{\underline{u}}(0,0) = 1 \cdot \frac{(-5)}{\sqrt{29}} - 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = -\frac{7}{\sqrt{29}}.$$

18. Határozza meg az $f(x,y) = x^2e^{3y} - ye^{2x} + 1$ függvény $\underline{u} = (2,-2)$ irányú iránymenti deriváltját a $(0,0)$ pontban!

Megoldás: A fentiek alapján számolunk:

$$f_x(x,y) = 2xe^{3y} - 2ye^{2x}, \qquad f_y(x,y) = 3x^2e^{3y} - e^{2x},$$

tehát a $(0,0)$ pontban $x = 0$ és $y = 0$, ezért

$$f_x(0,0) = 0, \qquad f_y(0,0) = -1,$$

továbbá

$$\underline{u} = (2,-2), \text{ ezért } \|\underline{u}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}.$$

Végül tehát

$$f_{\underline{u}}(0,0) = 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{8}} - 1 \cdot \frac{(-2)}{\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{8}}.$$

19. Határozza meg az $f(x,y) = (x+2y)^3$ függvény $\underline{u} = (2,1)$ irányú iránymenti deriváltját a $P(1,1)$ pontban!

Megoldás: A fentiek alapján számolunk:

$$f_x(x,y) = 3(x+2y)^2, \qquad f_y(x,y) = 6(x+2y)^2,$$

tehát a $P(1,1)$ pontban $x = 1$ és $y = 1$, ezért

$$f_x(1,1) = 27, \qquad f_y(1,1) = 54,$$

továbbá

$$\underline{u} = (2,1), \text{ ezért } \|\underline{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Végül tehát

$$f_{\underline{u}}(1,1) = 27 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 54 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{108}{\sqrt{5}}.$$

20. Határozza meg az $f(x,y) = (2x^2 + y^5)^3$ függvény $\underline{u} = (2,-3)$ irányú iránymenti deriváltját az $(1,-1)$ pontban!

Megoldás: A fentiek alapján számolunk:

$$f_x(x,y) = 12x(2x^2 + y^5)^2, \qquad f_y(x,y) = 15y(2x^2 + y^5)^2,$$

tehát az $(1,-1)$ pontban $x = 1$ és $y = -1$, ezért

$$f_x(1,1) = 12, \qquad f_y(1,1) = -15,$$

továbbá

$$\underline{u} = (2,-3), \text{ ezért } \|\underline{u}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}.$$

Végül tehát

$$f_{\underline{u}}(1,-1) = 12 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} - 15 \cdot \frac{(-3)}{\sqrt{13}} = -\frac{21}{\sqrt{13}}.$$

21. Határozza meg az $f(x,y)=\frac{2x-3y}{4y-3x}$ függvény $\underline{u}=(-3,4)$ irányú iránymenti deriváltját az $(2,1)$ pontban!

Megoldás: A fentiek alapján számolunk:

$$f_x(x,y)=\frac{2(4y-3x)-(-3)(2x-3y)}{(4y-3x)^2}=\frac{-y}{(4y-3x)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{(-3)(4y-3x)-4(2x-3y)}{(4y-3x)^2}=\frac{x}{(4y-3x)^2},$$

tehát az $(2,1)$ pontban $x=2$ és $y=1$, ezért

$$f_x(2,1)=\frac{(-1)}{4}=-\frac{1}{4},\qquad f_y(2,1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

továbbá

$$\underline{u}=(-3,4),\ \text{ ezért }\ \|\underline{u}\|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5.$$

Végül tehát

$$f_{\underline{u}}(2,1)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{(-3)}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{11}{20}.$$

22. Határozza meg az $f(x,y)=\frac{3x-2y^2}{x^2+y}$ függvény $\underline{u}=(3,1)$ irányú iránymenti deriváltját az $(-1,0)$ pontban!

Megoldás: A fentiek alapján számolunk:

$$f_x(x,y)=\frac{3(x^2+y)-2x(3x-2y^2)}{(x^2+y)^2}=\frac{-3x^2+4xy^2+3y}{(x^2+y)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{(-4y)(x^2+y)-(3x-2y^2)}{(x^2+y)^2}=\frac{-3x-4x^2y-2y^2}{(x^2+y)^2},$$

tehát a $(-1,0)$ pontban $x=-1$ és $y=0$, ezért

$$f_x(-1,0)=\frac{(-3)}{1}=-3,\qquad f_y(-1,0)=\frac{3}{1}=3,$$

továbbá

$$\underline{u}=(3,1),\ \text{ ezért }\ \|\underline{u}\|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}.$$

Végül tehát

$$f_{\underline{u}}(-1,0)=-3\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}+3\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{6}{\sqrt{10}}.$$

23. Határozza meg az $f(x,y)=\sqrt{4x+3y^2}$ függvény $\underline{u}=(1,-1)$ irányú iránymenti deriváltját az $(1,1)$ pontban!

Megoldás: Célszerű $f(x,y)$-t a következőképpen írni:

$$f(x,y)=(4x+3y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

A fentiek alapján számolunk:

$$f_x(x,y)=\frac{1}{2}\cdot 4(4x+3y^2)^{-\frac{1}{2}}=2(4x+3y^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{4x+3y^2}},$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{2} \cdot 6y(4x+3y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3y}{\sqrt{4x+3y^2}},,$$

tehát az $(1,1)$ pontban $x=1$ és $y=1$, ezért

$$f_x(1,1) = \frac{2}{\sqrt{7}}, \qquad f_y(1,1) = \frac{3}{\sqrt{7}},$$

továbbá

$$\underline{u} = (1,-1), \ \text{ ezért } \ \|\underline{u}\| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Végül tehát

$$f_{\underline{u}}(1,1) = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{7}} \frac{(-1)}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}.$$